Annexe B : Les vecteurs

Certains étudiants éprouvent de la difficulté en première session à l'École lorsqu'ils suivent le cours ING-120 "Statique et dynamique". Les vecteurs sont utilisés abondamment dans ce cours comme outil de modélisation et de calcul pour résoudre une multitude de problèmes physiques.

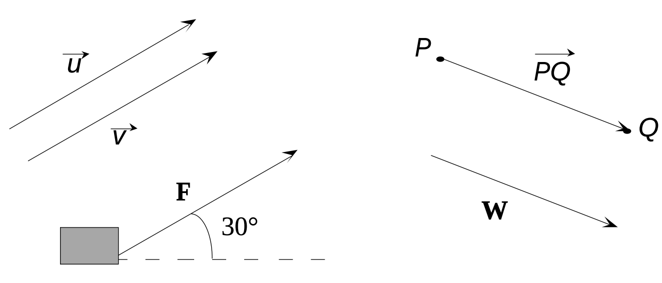
Nous rappellerons dans cette annexe les notions de base sur les vecteurs. Nous insisterons davantage sur la compréhension et l'utilisation de cet outil que sur l'aspect théorique du sujet. Nous utiliserons une notation proche de celle qu'on retrouve en physique quoique nous soulignerons lorsque nécessaire différentes notations équivalentes que l'on retrouve dans la littérature.
Cet outil sera revu plus en profondeur lorsque vous ferez votre 2e cours de mathématiques, à savoir MAT-135 "Algèbre linéaire et analyse vectorielle".

Scalaires et vecteurs

En physique, plusieurs quantités sont complètement déterminées par un nombre réel (auquel on associe une unité) : le temps, la masse, le volume. On parle ainsi d'un déplacement d'une durée de 30 s, d'un objet ayant une masse de 80 kg; on appelle ces quantités des scalaires.

Dans d'autres cas, un nombre réel positif décrivant la grandeur d'une quantité n'est pas suffisant. On doit spécifier également une orientation (ou direction) pour complètement déterminer ces quantités. Lorsque c'est le cas, on dit que l'on a une quantité vectorielle et l'on peut la modéliser par un vecteur. On représente visuellement un vecteur par un segment de droite orienté (une flèche) dont la longueur est proportionnelle à la quantité vectorielle considérée.

Exemple B.1



- on remarque que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même longueur et la même orientation, donc ils sont équivalents.
- $\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur qui va du point P au point Q, il peut représenter la position de Q par rapport à P.
- le vecteur **F** représente une force constante appliquée sur un objet (avec un angle de 30° par rapport à l'horizontale)

Remarque sur les notations :

On rencontre essentiellement 2 types de notations pour désigner un vecteur :

- dans la littérature, on désigne en général un vecteur par une lettre en caractère gras
- on peut également mettre une flèche au-dessus de la (ou des) lettre(s). C'est ce qu'on fait lorsqu'on écrit à la main (essayez d'écrire en caractère gras!).

Exemple B.2

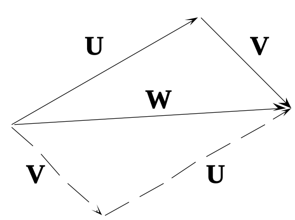
- **U** , $\vec{u}$, **F**
- pour désigner un vecteur qui va du point A au point B, on utilise soit $\vec{AB}$ ou $\mathbf{r}_{AB}$.

Lorsqu'on veut parler de la longueur d'un vecteur, on utilise la notation ê**U**ê ou $|\vec{AB}|$.On désigne alors la norme (ou module) de **U** ou la norme de $\vec{AB}$ (En anglais on parle de "magnitude of **U**")
Certains auteurs utilisent également la notation $\|\mathbf{U}\|$.

IMPORTANT : Un vecteur est entièrement caractérisé par sa longueur (sa norme) et sa direction. Il est donc indépendant de son point de départ. Les vecteurs **W** et $\vec{PQ}$ de l'exemple 1 sont donc équivalents.

Les vecteurs peuvent être utilisés pour représenter géométriquement des déplacements dans l'espace. Dans l'exemple qui suit, **U** et **V** représentent 2 déplacements. On rappelle que **U** désigne un déplacement d'une longueur ê**U**ê dans la direction indiquée par la flèche. Le vecteur **U** peut donc être déplacé en autant qu'on préserve sa norme et son orientation.

Exemple B.3

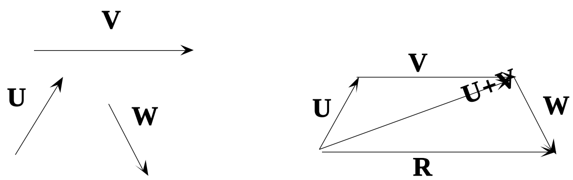


W représente le résultat de 2 déplacements, on parle alors de la somme des deux vecteurs : **U** + **V** = **W**

On remarque également que l'addition de vecteurs est commutative :

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U} = \mathbf{W}$$

On peut également additionner 3 vecteurs ou plus :

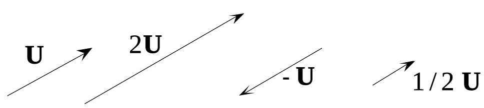


On n'a qu'à déplacer les vecteurs pour les mettre bout à bout. On remarque que l'addition de vecteurs est associative

$$(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} = \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{R}$$

On peut multiplier un vecteur **U** par un scalaire (un nombre réel) a : $a\mathbf{U}$ représente un nouveau vecteur de longueur (norme) $|a|\,|\mathbf{U}|$ et de même direction que **U** si a est positif ou de direction opposée si a est négatif.

À ce moment, – **U** représente le même vecteur que **U** mais de direction opposée.



La différence de 2 vecteurs est définie comme suit :

$$\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{U} + (-\mathbf{V})$$

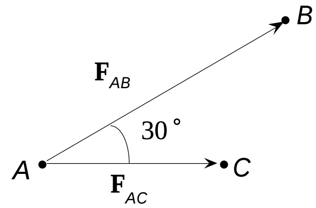
Graphiquement cela donne :

$|\mathbf{U}|$ représente la longueur du vecteur **U**. Donc $\dfrac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}$ représente un vecteur de même direction que **U** mais de longueur 1.

On dit alors qu'on a un **<u>vecteur unitaire</u>**. On utilise en général la notation **u**, en minuscule, pour désigner un vecteur unitaire (en ING-120, vous verrez plutôt la notation e). $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}$

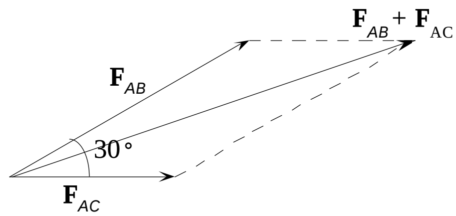
En utilisant les résultats précédents et des concepts de base en géométrie, on peut résoudre certains problèmes de base en physique. Dans l'exemple qui suit, on veut trouver les caractéristiques de la résultante de deux forces s'appliquant sur un objet .

<u>Exemple B.4</u> Deux forces s'appliquent sur un corps tel que décrit dans le schéma suivant :

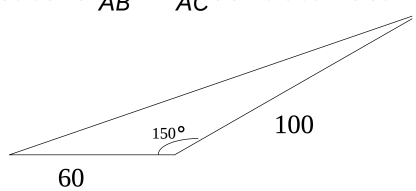


$|\mathbf{F}_{AC}| = 60\text{kN} \qquad |\mathbf{F}_{AB}| = 100\text{kN}$

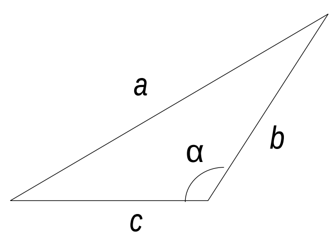
$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ représente la résultante des deux forces. On peut tracer cette résultante:



Pour trouver $|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|$ on travaille sur le triangle suivant :



en se rappelant que dans un triangle quelconque de côtés *a* , *b* et *c* avec angle α



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(loi des cosinus)

Donc ici $|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|^2 = 100^2 + 60^2 - 2\,[100 \cdot 60 \cdot \cos(150°)]$

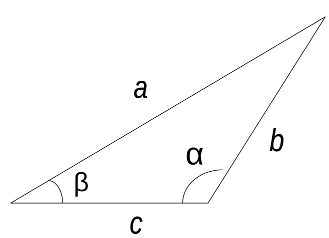
$= 13\,600 - 12\,000 \cdot (-0{,}8660)$

$= 23\,992{,}30485$

$|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}| = 154{,}89\ \text{kN}$

La résultante des deux forces est une force de 154,89 kN. En se servant de la loi des sinus, on peut trouver l'angle que fait cette force résultante avec l'horizontale.

rappel:



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

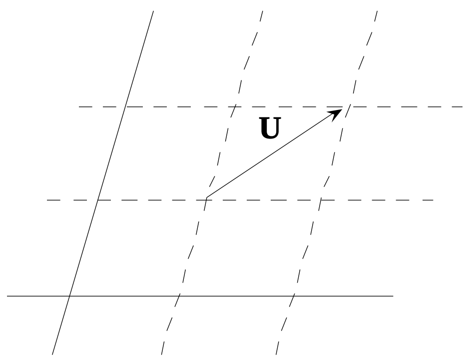
(loi des sinus)

Dans notre exemple, cela donne $\dfrac{\sin(150°)}{154,89} = \dfrac{\sin \beta}{100}$

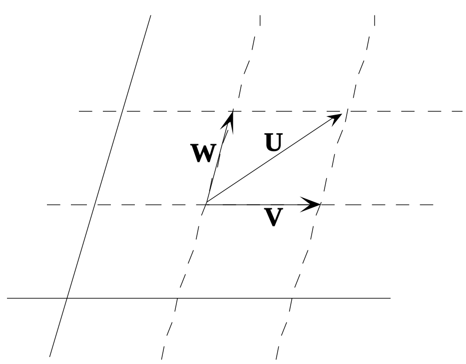
$\sin \beta = 0,3228$

$\beta = \arcsin(0,3228) = 18.8°$

Dans le plan, un vecteur **U** peut toujours se décomposer de façon unique en une somme de deux vecteurs, si on spécifie l'orientation de ces deux vecteurs.. La figure suivante montre un vecteur **U** ainsi que 2 droites spécifiant l'orientation voulue pour la décomposition.



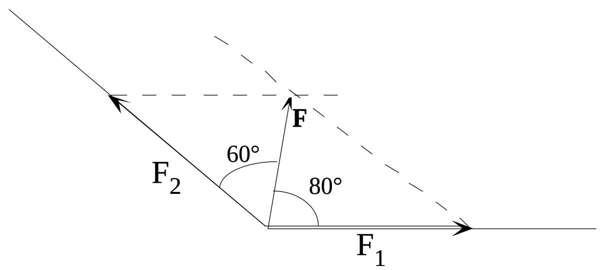
En traçant en pointillé 2 lignes parallèles à chaque droite, passant par les 2 extrémités du vecteur **U**, on constate que **U** se retrouve dans la diagonale d'un parallélogramme. En se rappelant la définition d'une somme de vecteurs, on obtient aisément les vecteurs **V** et **W** tels que **U** = **V** + **W**.



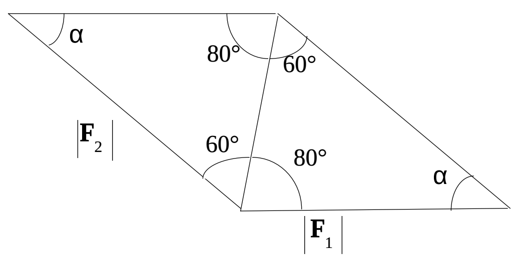
Les vecteurs **V** et **W** sont appelés <u>les composantes vectorielles</u> de **U**.

Nous verrons plus loin les avantages de ce type de décomposition, surtout lorsque ces composantes vectorielles sont orthogonales (à angle droit) entre elles. Pour le moment, nous examinons un problème pratique où l'on doit décomposer un vecteur-force **F**.

Exemple B.5 Le dessin suivant représente une force **F** de 400 livres (lb) dans un plan et on désire la décomposer en 2 forces suivant les droites indiquées. Trouvez les 2 composantes vectorielles voulues.



En traçant en pointillé des lignes parallèles aux droites indiquées, nous obtenons un parallélogramme avec côtés $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ qui sont les deux forces cherchées. Géométriquement, on n'a qu'à étudier les deux triangles :



Comme la somme des angles internes d'un triangle = 180° on aura α = 40°

Par la loi des sinus : $\dfrac{\sin 40°}{400} = \dfrac{\sin 60°}{|\mathbf{F}_1|}$, donc $|\mathbf{F}_1| = 400\dfrac{\sin 60°}{\sin 40°} = 538{,}9\text{lb}$

On aura également $\dfrac{\sin 40°}{400} = \dfrac{\sin 80°}{|\mathbf{F}_2|}$, donc $|\mathbf{F}_2| = 400\dfrac{\sin 80°}{\sin 40°} = 612{,}8\text{lb}$

Donc 2 forces ayant des normes de 538,9 lb et 612,8 lb et formant entre elles un angle de 140° auront pour résultante une force de 400 lb comme indiquée sur le diagramme.

Nous avons vu la multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre réel). Par exemple $\frac{3}{4}\mathbf{V}$ nous donne un nouveau vecteur d'une longueur égale à $\frac{3}{4}$ de celle de **V** et de même direction que **V**.

Est-ce qu'on peut multiplier deux vecteurs et quelle interprétation peut-on donner à cette opération?
Il existe 2 façons de faire un produit de 2 vecteurs et nous en verrons une dans cette section.

On définit le **<u>produit scalaire</u>** (en anglais dot product) entre 2 vecteurs comme suit :

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\cos\theta$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs, $0 \le \theta \le 180°$ ou $0 \le \theta \le \pi$ radians.

On remarque tout de suite que le produit scalaire de deux vecteurs donne un scalaire (un nombre réel) et non un vecteur.

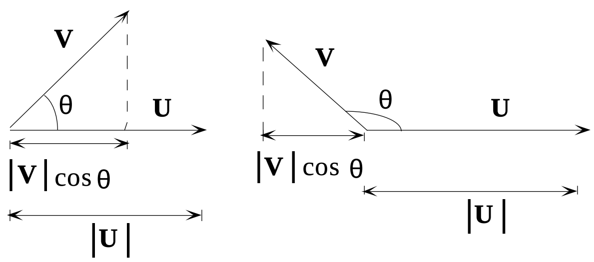
<u>Attention</u> : Ne pas mêler "<u>produit scalaire</u>" et "<u>produit **par** un scalaire</u>".

On remarque de cette définition que si $\theta = 90°$, si les 2 vecteurs sont orthogonaux, alors $\cos\theta = 0$ et donc $\mathbf{V}\cdot\mathbf{U} = 0$ d'où le théorème suivant :

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbf{U} \text{ et } \mathbf{V} \text{ sont orthogonaux}$$

De plus, si $90° < \theta \leq 180°$, on aura $\cos\theta < 0$ donc $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} < 0$. Et $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} > 0$ si $0 \leq \theta < 90°$

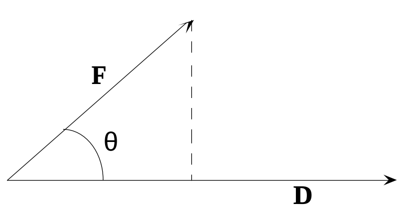
Géométriquement, on peut voir le produit scalaire de cette façon : $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}\cos\theta|$



En valeur absolue, $|\mathbf{V}|\cos\theta$ correspond à la longueur du vecteur **V** projeté sur la direction de **U**. Nous pouvons constater également que si le vecteur **U** est unitaire (de longueur 1) disons **e** alors $|\mathbf{e}\cdot\mathbf{V}|$, c'est-à-dire la valeur absolue du produit scalaire de **e** avec **V** donnera la longueur de la projection de **V** dans la direction de **e**.

Examinons maintenant une application physique du produit scalaire. Soit **F** un vecteur force constant s'appliquant sur un objet. On définit le travail W comme étant le produit de la force (ou de sa composante dans la direction du mouvement) fois la longueur du déplacement.

S'il y a un angle θ entre la force et la direction du mouvement, alors le travail $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$ où **D** est le vecteur déplacement.



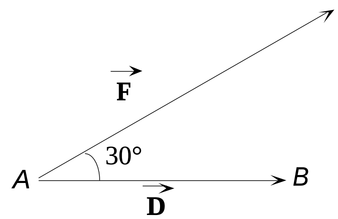
En effet , $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta$

$= |\mathbf{D}|\,|\mathbf{F}|\cos\theta$

$|\mathbf{F}|\cos\theta =$ composante de la force dans la direction du mouvement

$|\mathbf{D}| =$ longueur du déplacement

Exemple B.6 Une force constante de 90 N s'applique à un angle de 30° lorsqu'on déplace un objet d'un point A à un point B distant de 50 m. Quel est le travail effectué pendant ce déplacement ?



$\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = 90$

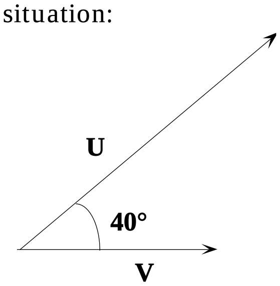
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 50$

Le travail W = $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = 90 \cdot 50 \cos 30° = 3897$ J . Donc cela nécessite un travail de 3897 joules.

Dans ce qui précède, nous n'avons mis l'accent que sur l'aspect géométrique des vecteurs. Nous verrons maintenant que les vecteurs ont également une nature algébrique. Cela nous permettra de généraliser certains des concepts vus précédemment et nous permettra de simplifier plusieurs calculs, surtout dans des situations plus complexes que les cas simples présentés à date.

Exercices: (les réponses sont à la fin de cette annexe)

1- Deux vecteurs **U** et **V** forment entre eux un angle de 40° . La norme de **U** est de 20 et celle de **V** est de 12 . Le dessin suivant illustre cette situation:



a) reproduisez ce dessin à l'échelle et à l'aide de la règle du parallélogramme, tracez la résultante **U**+**V** .

b) estimez la longueur de **U**+**V** et l'angle de la résultante par rapport à **V** (on sort sa règle et son compas!!!) .

c) vérifiez vos réponses en b) en calculant les vraies valeurs demandées.

2- Dans un plan, on veut décomposer une force **F** de 200N en 2 forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$. $\mathbf{F}_1$ doit faire un angle de 70° par rapport à **F** et $\mathbf{F}_2$ un angle de 50° par rapport à **F**. Donc $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ forment un angle de 120° entre elles. Quelle doit être la grandeur de ces deux forces pour satisfaire les exigences précédentes ?

3- Une force de 50N est utilisée pour déplacer un objet sur une distance de 30m . La force s'applique avec un angle de 20° par rapport au déplacement. Quel est le travail effectué durant ce déplacement ?

*4- Deux vecteurs **U** et **V** sont tels que leur produit scalaire vaut -15 . De plus la norme de **U** est 20 et celle de **V** est 4 .

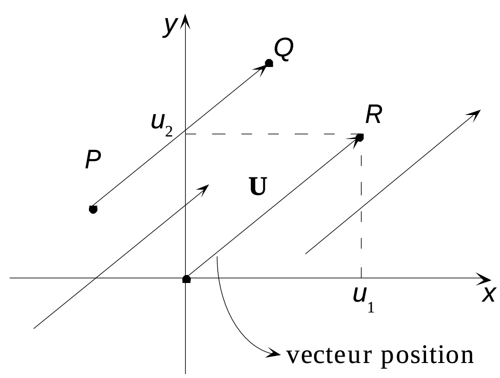
a) comment interpréter le fait que le produit scalaire soit négatif ?

b) quel est l'angle entre ces deux vecteurs ?

Les vecteurs dans le plan

Nous nous limiterons dans cette section à considérer les vecteurs dans le plan. Nous plongerons les vecteurs dans un système de coordonnées cartésiennes, le plan x-y classique que vous connaissez tous.

Le dessin suivant représente ce système de coordonnées, ainsi qu'un vecteur allant du point P au point Q. Vous voyez également 3 autres vecteurs équivalents au vecteur **PQ.** Tous ces vecteurs sont équivalents puisqu'ils sont tous de la même longueur et ont la même orientation.

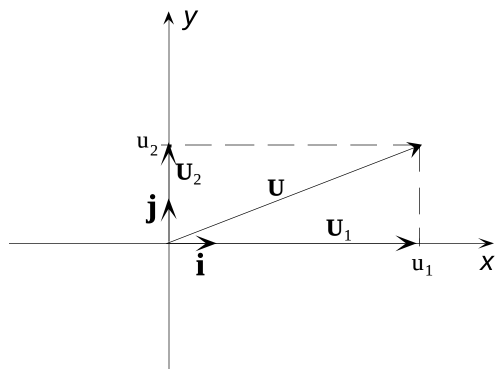


Dans l'approche qui suit, nous choisirons toujours comme représentant d'un vecteur celui dont le point de départ est à l'origine. On appelle ce vecteur, le vecteur position. Vous remarquerez que le vecteur **U** de notre dessin a comme point terminal R de coordonnées (u_1, u_2) c'est-à-dire $x = u_1$ et $y = u_2$.

On constate que tout point R du plan détermine un unique vecteur position et que tout vecteur position est complètement déterminé par les coordonnées (x, y) de son extrémité.

Danger : Ne jamais confondre point dans le plan et vecteur. Les coordonnées (2, 3) représentent un point dans le plan. Si l'on veut décrire un vecteur position **U** dont l'extrémité est au point R (2, 3), nous utiliserons la notation suivante **U** = < 2, 3 > .

Dans la section précédente, nous avons mentionné, en parlant des composantes vectorielles d'un vecteur, que l'on peut décomposer tout vecteur du plan en une somme de 2 vecteurs orthogonaux. Le dessin suivant illustre ce qui se passe avec un vecteur position. On remarque que $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ et que $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$; donc le point (u_1, u_2) est l'extrémité du vecteur **U**.



Si on définit un vecteur unitaire $\vec{\imath}$ (ou **i**) pointant dans la direction positive de *x*, et un vecteur unitaire $\vec{\jmath}$ (ou **j**) pointant dans la direction positive de *y*, on remarque que

$$\mathbf{U}_1 = u_1 \vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{U}_2 = u_2 \vec{\jmath}\,.$$

De sorte que $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = u_1 \vec{\imath} + u_2 \vec{\jmath}$.

Notation: u_1 et u_2 sont les composantes scalaires de **U,** alors que $u_1\vec{\imath}$ et $u_2\vec{\jmath}$ sont les composantes vectorielles de **U**.

Tout vecteur du plan peut donc s'exprimer avec la forme $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$.

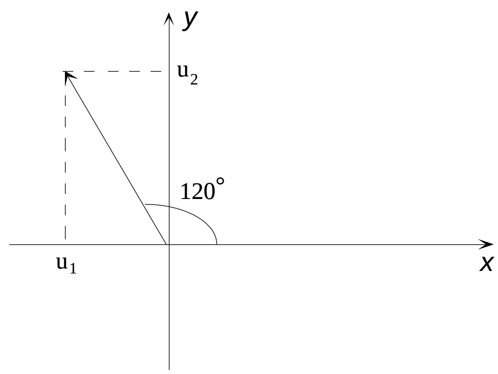
Nous verrons plusieurs avantages à exprimer les vecteurs sous cette forme:

Soit $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$, alors $|\mathbf{U}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, par le théorème de Pythagore.

Si $|\mathbf{U}|$ est connue, alors $u_1 = |\mathbf{U}|\cos\theta$ et $u_2 = |\mathbf{U}|\sin\theta$, où θ est l'angle entre le côté positif de l'axe des *x* et le vecteur **U**; on peut également obtenir θ avec la relation $\dfrac{u_2}{u_1} = \operatorname{tg}\theta$.

Si $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$ et $\mathbf{V} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath}$, alors $\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_1+v_1)\vec{\imath} + (u_2+v_2)\vec{\jmath}$

Exemples B.7 a) Donnez les composantes vectorielles d'un vecteur **U** de norme 60, formant un angle $\theta = 120°$ avec l'horizontale.



$$u_1 = 60\cos 120° = (60)\left(\frac{-1}{2}\right) = -30$$

$$u_2 = 60\sin 120° = (60)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30\sqrt{3} = 51{,}96$$

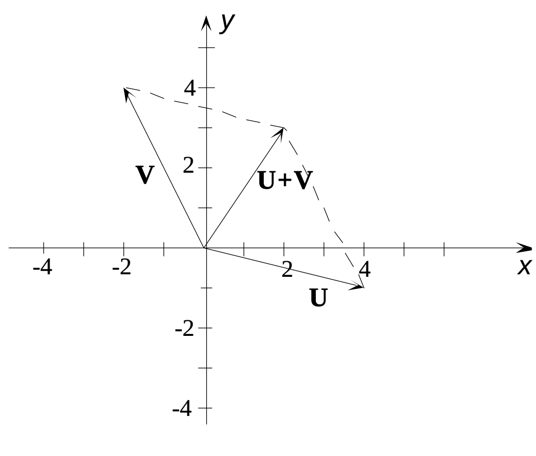
Donc **U** = $-30\vec{\imath} + 51{,}96\vec{\jmath}$

b) Soit le vecteur **V** = $-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et le vecteur **U** = $4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Tracer ces deux vecteurs dans le plan cartésien, ainsi que le vecteur **U** + **V**.

On sait que **U** + **V** = $(4-2)\vec{\imath} + (-1+4)\vec{\jmath}$

$= 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

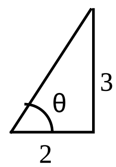


- la norme de **U** + **V** est $|\mathbf{U} + \mathbf{V}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{,}61$

- l'angle θ que fait **U** + **V** avec l'horizontale est tel que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56{,}3°$$

ou, comme θ est tel que



$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3}{2}$ $\theta = \mathrm{arctg}\left(3/2\right) = 56{,}3°$

- l'angle θ que fait **U** avec l'horizontale:

comme $\mathbf{U} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-1}{4}$ $\theta = \mathrm{arctg}\left(-1/4\right) = -14°$

- Il faut être prudent lorsqu'on utilise cette dernière procédure. En effet, en l'appliquant au vecteur **V**, on aurait et:

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{4}{-2} = -2$ car $\mathbf{V} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ $\theta = \mathrm{arctg}(-2) = -63{,}4°$, ce qui est faux (voir le graphe). Il ne faut pas oublier que la fonction arctg(x) retourne un angle entre –90° et 90°. En réalité, l'angle cherché ici est $\theta = -63{,}4° + 180° = 116{,}6°$.

Remarque sur la notation: les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ reviennent tellement souvent que ça devient vite fastidieux de toujours faire les flèches au-dessus. C'est pourquoi on les écrira quelquefois **i** et **j** . L'écriture manuscrite fait de même: i et j, tout simplement.

Un des gros avantages de l'approche algébrique est que le temps de traitement n'est pas vraiment plus long, même si on manipule 3 vecteurs ou plus. Par exemple, soit $\mathbf{U} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{V} = -5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ et $\mathbf{W} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. $\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W} = (2-5+4)\mathbf{i} + (5-1-2)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$$|\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

L'angle θ par rapport à l'horizontale sera $\theta = \mathrm{arctg}\left(2/1\right) = 63{,}4°$

On voit très bien que **i** + 2**j** est dans le premier quadrant.

Si on devait résoudre ce problème par des méthodes géométriques, le temps de traitement serait beaucoup plus long. (Essayez-le!)

On peut résumer ici les différentes propriétés des vecteurs dans le plan:

Soit $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$, $\mathbf{V} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath}$; soit $a \in \mathbb{R}$.

1- $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U} = (u_1 + v_1)\vec{\imath} + (u_2 + v_2)\vec{\jmath}$

2- $a\mathbf{U} = (au_1)\vec{\imath} + (au_2)\vec{\jmath}$

3- $|\mathbf{U}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

4- le vecteur unitaire **e** dans la même direction que **U** sera $\dfrac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = \left(\dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right)\vec{\jmath}$

5- le produit scalaire $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}|\ |\mathbf{V}|\ \cos(\theta) = (u_1v_1) + (u_2v_2)$

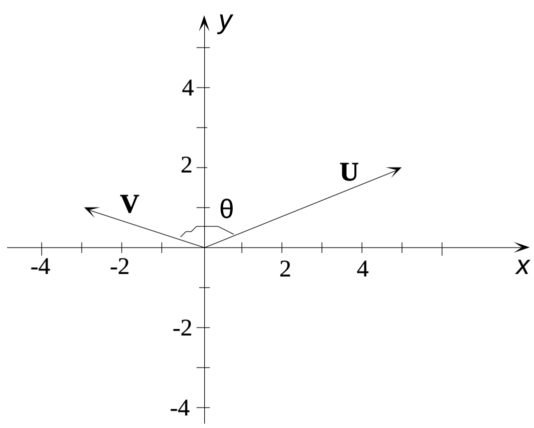
On remarque, dans le cas de cette dernière équation, que le produit scalaire de 2 vecteurs **U** et **V** peut s'évaluer à l'aide des composantes scalaires des vecteurs, sans faire intervenir l'angle θ dans le calcul.

Exemple B.8 Quel est l'angle entre les vecteurs $\mathbf{U} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ et $\mathbf{V} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$?

$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = (5)(-3) + (2)(1) = -13$

Puisque $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{U}||\mathbf{V}|} = \dfrac{-13}{\sqrt{25+4}\sqrt{9+1}} = \dfrac{-13}{\sqrt{290}} = -0{,}7634$

donc $\theta = \arccos(-0{,}7634) = 139{,}8°$



<u>Remarque</u>: le fait que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ soit négatif nous indique que l'angle entre **U** et **V** est plus grand que 90°.

Les propriétés du produit scalaire sont:

1- $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$

2- $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W})$

3- $c(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = (c\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot (c\mathbf{V}),\ c \quad \mathbb{R}.$

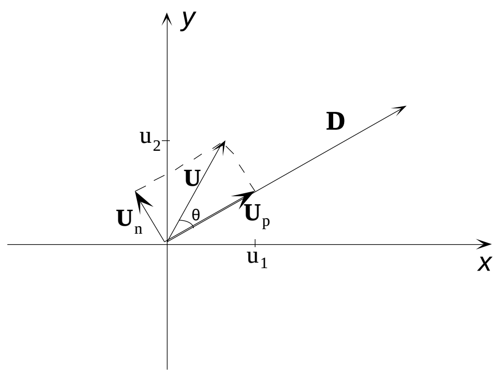
4- $\mathbf{0} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}$

5- $\mathbf{U} \quad \mathbf{U} = |\mathbf{U}|^2$

Dans la propriété 4, **0** désigne le vecteur nul: $0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$, vecteur de longueur nulle et de direction indéterminée.

Le produit scalaire peut être utilisé pour déterminer les composantes vectorielles d'un vecteur **U** qui sont, l'une parallèle, l'autre normale à une direction donnée.

Soit $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$ et le vecteur direction $\mathbf{D} = d_1\vec{\imath} + d_2\vec{\jmath}$



$\mathbf{U}_p$ est la composante vectorielle de **U** (ou sa projection) dans la direction de **D** et $\mathbf{U}_n$ est la projection normale (perpendiculaire) de **U** par rapport à **D**.

On a vu dans la section précédente que $\left|\mathbf{U}_p\right| = \mathbf{U} \quad \mathbf{e} = \mathbf{U} \quad \dfrac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}$, si $\theta < 90°$.

Donc $\mathbf{U}_p = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\, \mathbf{e}$ = la longueur de la projection multipliée par le vecteur unitaire.

De plus, comme $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_n$, alors $\mathbf{U}_n = \mathbf{U} - \mathbf{U}_p$.

<u>Exemple B.9</u> Soit $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ et $\mathbf{V} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Quelle est la composante vectorielle de **U** dans la direction de **V** ?

Transformons **V** en un vecteur unitaire:

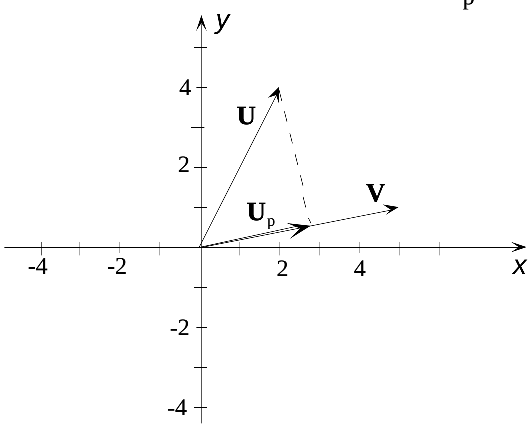
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{5}{\sqrt{26}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\,\mathbf{j}$$

La longueur de la projection de **U** sur **V** est $\mathbf{U}\cdot\mathbf{e} = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} + 4\,\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{26}}$

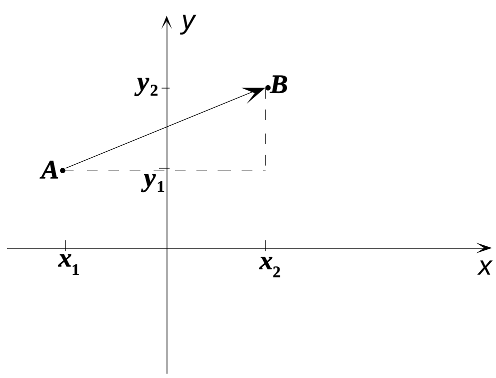
et on multiplie le vecteur unitaire **e** par la longueur de la projection:

$$\mathbf{U}_\mathrm{p} = \frac{14}{\sqrt{26}}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\,\mathbf{j}\right) = \frac{70}{26}\,\mathbf{i} + \frac{14}{26}\,\mathbf{j} \quad 2{,}73\mathbf{i} + 0{,}54\mathbf{j}$$

Le graphe suivant représente **U**, **V** et $\mathbf{U}_\mathrm{p}$.



Soit 2 points A et B de coordonnées respectives (x_1 , y_1) et (x_2 , y_2). On veut exprimer en termes de **i** et **j** le vecteur qui va du point A au point B et que l'on note $\vec{AB}$ ou $\mathbf{r}_{AB}$.

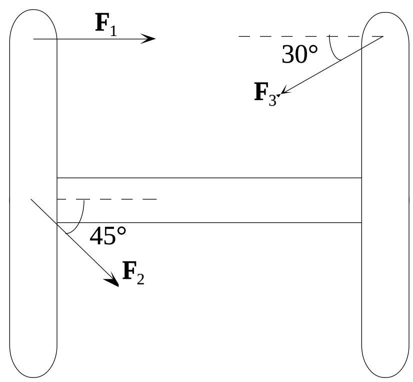


On constate sur ce dessin que l'on a un triangle rectangle d'hypoténuse $|\mathbf{r}_{AB}|$. Les deux autres côtés ont comme longueur $(y_2 - y_1)$ et $(x_2 - x_1)$. Le vecteur position sera $(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$.

Si $A = (-3 , 4)$ et $B = (5 , 7)$, alors $\mathbf{r}_{AB} = (5-(-3))\mathbf{i} + (7-4)\mathbf{j} = 8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

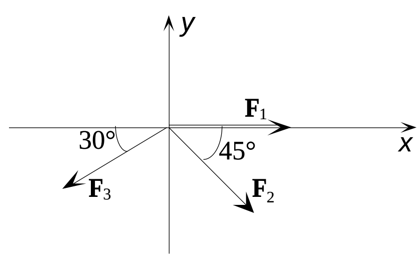
Fréquemment, en physique, on doit introduire un système de coordonnées *x-y* pour modéliser les problèmes et pour pouvoir appliquer les méthodes de calcul vues dans cette section. Les exemples suivants illustrent cette situation.

Exemple B.10 3 forces de 5N chacune sont appliquées sur un objet, comme indiqué dans le graphique suivant.



Trouvez la grandeur de la force résultante.

Plaçons ces 3 forces dans un plan *x*-*y*.



Exprimons chaque force à l'aide des vecteurs **i** et **j** :

$\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ (puisque le vecteur est de longueur 5)

Comme $5\sin(-45°) = 5\left(-\sqrt{2}/2\right) = \dfrac{-5\sqrt{2}}{2} = -3,54$

$5\cos(-45°) = 5\left(\sqrt{2}/2\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 3,54$

on a $\mathbf{F}_2 = 3,54\mathbf{i} - 3,54\mathbf{j}$

Comme $5\sin(-150°) = -2,5$

$5\cos(-150°) = -4,33$

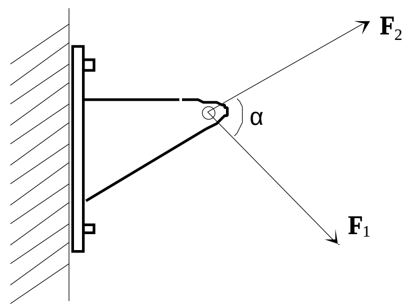
$\mathbf{F}_3 = -4,33\mathbf{i} - 2,5\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (5 + 3,54 - 4,33)\mathbf{i} + (0 - 3,54 - 2,5)\mathbf{j}$

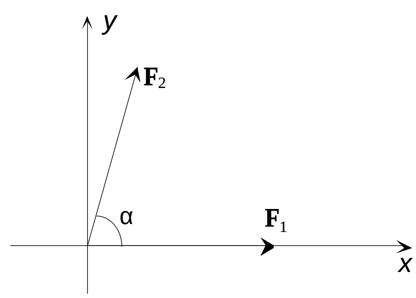
$\mathbf{F}_R = 4,21\mathbf{i} - 6,04\mathbf{j}$

et $\left|\mathbf{F}_R\right| = \sqrt{4,21^2 + (-6,04)^2} = \sqrt{54,21} = 7,4\,\mathrm{N}$

Exemple B.11 Deux forces de 100 lb chacune, $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, agissent sur un support. Ce dernier se brisera si la grandeur de la force totale s'exerçant sur lui excède 150 lb. Quel est l'intervalle des valeurs acceptables pour l'angle α entre les deux forces ?



Positionnons les 2 forces dans un système de coordonnées *x-y*. Pour simplifier les calculs, $\mathbf{F}_1$ sera mis suivant l'axe des *x*. Ce choix n'affecte pas le problème puisqu'il est arbitraire (on a toujours 2 vecteurs de même longueur avec un angle α entre les deux).



$\mathbf{F}_1 = 100\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_2 = (100 \cos \alpha)\mathbf{i} + (100 \sin \alpha)\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (100 + 100 \cos \alpha)\mathbf{i} + (100 \sin \alpha)\mathbf{j}$

$\quad = 100\,(1 + \cos \alpha)\mathbf{i} + 100 \sin \alpha\ \mathbf{j}$

Donc $|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2| = \sqrt{100^2(1+\cos\alpha)^2 + 100^2 \sin^2\alpha}$

$\quad = 100\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$

et on veut que $|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2| \leq 150$

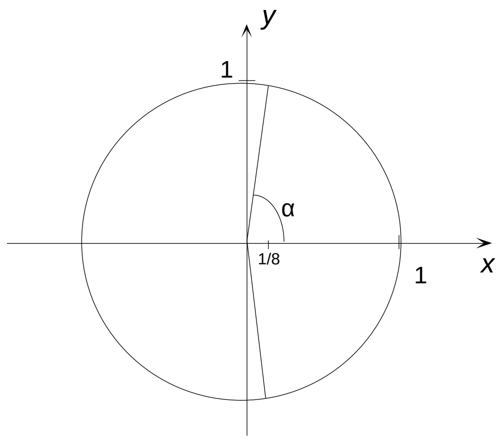
$$100\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \leq 150$$

$$(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \leq \left(\frac{150}{100}\right)^2$$

$$1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \leq \frac{9}{4}$$

$$2\cos\alpha \leq \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \quad \text{puisque } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$\cos\alpha \leq \frac{1}{8}$ Entre 0° et 360°, il y a 2 angles pour lesquels $\cos\alpha = \frac{1}{8}$



$\alpha = \arccos\left(1\!/\!_8\right) = 82{,}8°$

et $\alpha = -82{,}8°$ $\alpha = -82{,}8° + 360° = 277{,}2°$

Pour satisfaire la condition, on aura donc $82{,}8° \leq \alpha \leq 277{,}2°$.

Exercices: (les réponses sont à la fin de cette annexe)

5- Soit **U** = 4**i** + 2**j** , **V** = –2**i** + 6**j** et **W** = **i** – 3**j**

a) déterminez $\frac{3}{2}$**U** , **V**–**W** , **U**+**V**+**W**

b) est-ce que **U** et **V** sont perpendiculaires ?

c) est-ce que **V** et **W** sont parallèles ?

d) trouvez un vecteur **R** tel que **U**+**V**+**W**+**R** = **0** , c'est à dire que **R** annule la somme **U**+**V**+**W**

*e) trouvez un vecteur ayant la même direction que **W** mais de longueur 8

6- Un vecteur **U** de norme 25 forme un angle de 70° par rapport à l'horizontale (c'est-à-dire le côté positif de l'axe des x) . Donnez les composantes vectorielles de **U** en vous servant des vecteurs unitaires **i** et **j**.

7- Soit **U** = 3**i** – 5**j** et **V** = 2**i** + **j**.

a) déterminez **U**+**V**

b) donnez un vecteur unitaire ayant la même direction que **U**+**V**

c) quel est l'angle de **U**+**V** par rapport à l'axe positif des x ?

8- Quel est l'angle entre les vecteurs:

a) **U** = –2**i** – 3**j** et **V** = –**i** + 4**j** ?

b) **U** = **i** + 4**j** et **V** = 2**i** – 5**j** ?

*9- Soit les 3 points suivants dans le plan : $A = (2 , 5)$ $B = (3 , 1)$ $C = (8 , 4)$

a) quel est l'angle entre les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$?

b) quelle est la longueur de la projection de $\vec{BA}$ sur $\vec{BC}$?