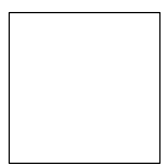
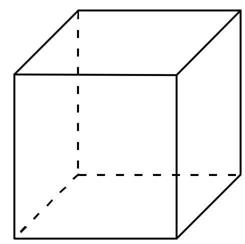
# <u>**Les vecteurs dans l'espace**</u>

Lorsqu'on veut dessiner un objet en trois dimensions, on doit pouvoir donner une perspective, une profondeur à notre dessin. Si vous prenez un cube et que vous le regardez avec votre ligne de vision directement au centre d'une face et perpendiculaire à celle-ci, vous verrez le dessin a) ci-dessous. Par contre, si votre regard est un peu plus haut et à droite d'une des faces, vous aurez le dessin b).



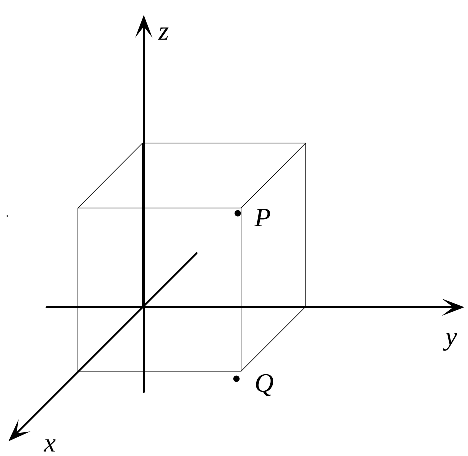
a)



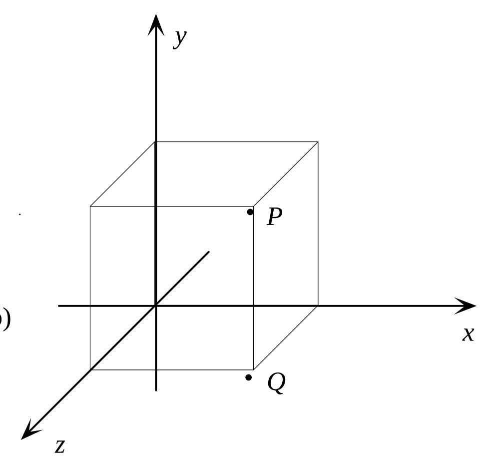
b)

Avec ce dernier dessin, on a vraiment l'impression de voir un objet en 3 dimensions. Pour décrire mathématiquement un objet dans l'espace, nous avons besoin d'un système de coordonnées à trois dimensions. On peut s'inspirer du dessin du cube pour représenter ce système à 3 axes *x*-*y*-*z* :

a)




OU b)



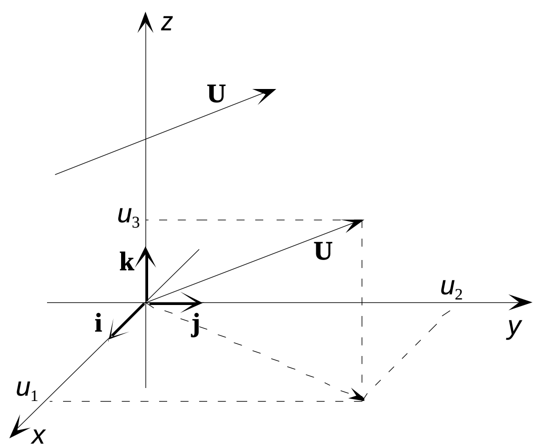

On dit que ces trois axes déterminent un <u>**système de coordonnées droit**</u> (par opposition à gauche).

Avec votre main droite, le pouce en extension, imaginez que vous saisissez l'axe des *z*. De plus, lorsque vous refermez vos doigts, ceux-ci doivent suivre la rotation de l'axe des *x* vers l'axe des *y*. Si vous suivez bien ces instructions, alors votre pouce doit indiquer la direction positive de l'axe des *z*. Cette dernière direction est déterminée par les positions relatives des axes *x* et *y*. On dit donc qu'on a un système "main droite".

Un point dans l'espace est entièrement déterminé par ses coordonnées $(x , y , z)$. Dans le dessin précédent, si le cube a un côté de 5 unités, alors $P = (5 , 5 , 5)$ et $Q = (5 , 5 , 0)$ dans le système a) ou $Q = (5 , 0 , 5)$ dans le système b).

Tout vecteur dans l'espace a un vecteur position équivalent dont l'extrémité initiale est au point (0 , 0 , 0), donc à l'origine, et dont l'extrémité finale est en un point de coordonnées $(u_1 , u_2 , u_3)$

Le dessin suivant illustre ce fait. On remarque sur ce dessin les vecteurs unitaires **i**, **j** et **k** selon la direction positive des axes *x*, *y* et *z*. On remarque également la projection du vecteur **U** dans le plan *x*-*y*.




On peut donc exprimer le vecteur **U** en composantes selon **i**, **j** et **k**

$$\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

On constate que $u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ représente la projection du vecteur **U** dans le plan *x*-*y*.
On utilise parfois la notation abrégée $<u_1 , u_2 , u_3>$ pour représenter le vecteur **U**.
On constate que cette façon de représenter un vecteur dans l'espace n'est qu'une extension naturelle de la section précédente où l'on travaillait dans le plan. On n'a qu'à adapter les formules déjà vues pour tenir compte de la dimension supplémentaire.

Soit $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ , $\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ et soit $c$ ℝ.

$|\mathbf{U}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_1+v_1)\mathbf{i} + (u_2+v_2)\mathbf{j} + (u_3+v_3)\mathbf{k}$

$c\mathbf{U} = (cu_1)\mathbf{i} + (cu_2)\mathbf{j} + (cu_3)\mathbf{k}$

$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$\qquad = |\mathbf{U}| \; |\mathbf{V}| \cos(\theta)$

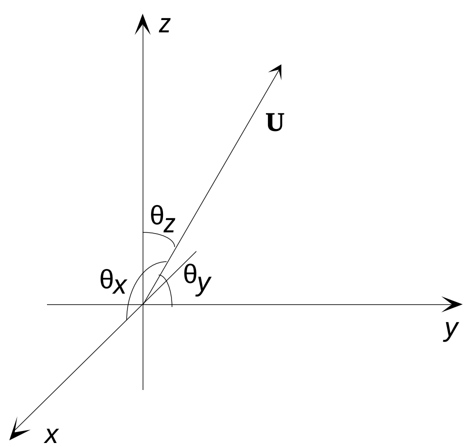
Soit $A\ (x_1, y_1, z_1)$ et $B\ (x_2, y_2, z_2)$ deux points dans l'espace. Le vecteur position qui va du point $A$ au point $B$ est donné par

$$\vec{AB} = \mathbf{r}_{AB} = (x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}$$

La distance séparant les deux points est donc la longueur de ce vecteur :

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

On se rappellera que dans le plan, à partir de la longueur d'un vecteur **U** et de l'angle θ par rapport à l'horizontale, on pouvait trouver facilement les coordonnées scalaires $u_1$ et $u_2$ telles que $\mathbf{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$. Qu'en est-il pour un vecteur position dans l'espace? Il est clair qu'un seul angle ne peut décrire la direction d'un vecteur dans l'espace. On fait donc appel à la notion d'**angles directeurs**. Il s'agit de mesurer l'angle du vecteur **U** par rapport à chacun des axes positifs.




Si $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$,

alors $u_1 = |\mathbf{U}|\cos(\theta_x)$

$u_2 = |\mathbf{U}|\cos(\theta_y)$

$u_3 = |\mathbf{U}|\cos(\theta_z)$

Les valeurs $\cos(\theta_x)$, $\cos(\theta_y)$ et $\cos(\theta_z)$ son appelées les **cosinus directeurs** de **U**.

Les 3 angles mentionnés ne sont pas complètement indépendants. En effet, 2 suffisent pour déterminer complètement la direction d'un vecteur dans l'espace, le troisième pouvant se déduire de la relation

$$\cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_z) = 1$$

De plus, les cosinus directeurs sont les composantes scalaires d'un vecteur unitaire ayant la même direction que **U**: $\dfrac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = \mathbf{e} = \langle \cos(\theta_x), \cos(\theta_y), \cos(\theta_z) \rangle$

**Exemple B.12** Soit $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Trouver un vecteur unitaire ayant même direction que **U**.

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = \frac{2}{\sqrt{21}}\,\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{21}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{21}}\,\mathbf{k}$$

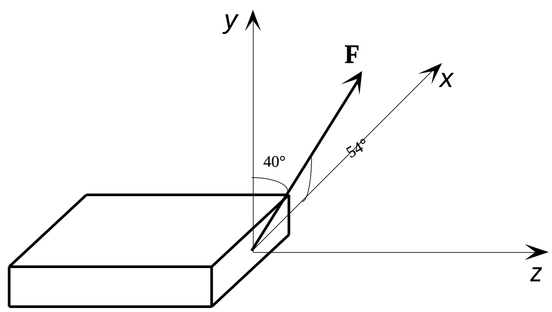
Quels sont les angles directeurs de **U** ?

$$\cos\theta_x = \frac{2}{\sqrt{21}} \qquad \theta_x = \arccos\left(2/\sqrt{21}\right) = 64{,}1°$$

$$\cos\theta_y = \frac{4}{\sqrt{21}} \qquad \theta_y = 29{,}2°$$

$$\cos\theta_z = \frac{-1}{\sqrt{21}} \qquad \theta_z = 102{,}6°$$

**Exemple B.13** Le câble d'une grue exerce une force **F** de 600 lb sur un caisson.




Il y a un angle de 54° entre **F** et l'axe des $x$ et un angle de 40° par rapport à la verticale (axe des $y$). De plus, la composante en $z$ est positive. Quel angle **F** fait-il par rapport à l'axe des $z$? Exprimer **F** comme combinaison des vecteurs **i**, **j** et **k**.

Soit $\mathbf{F} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

Comme $\theta_x = 54°$ et $\theta_y = 40°$,

$a_1 = 600 \cos 54° = 352{,}67$ lb

$a_2 = 600 \cos 40° = 459{,}63$ lb

De plus, comme $|\mathbf{F}| = 600 = \sqrt{353^2 + 460^2 + a_3^2}$

$a_3^2 = 600^2 - 353^2 - 460^2 = 24364{,}13$

$a_3 = 156{,}09$ lb

Donc $\mathbf{F} = 353\mathbf{i} + 460\mathbf{j} + 156\mathbf{k}$

Également, $\cos^2 54° + \cos^2 40° + \cos^2(\theta_z) = 1$

$\cos^2(\theta_z) = 1 - 0{,}3455 - 0{,}5868 = 0{,}0677$

$\cos(\theta_z) = 0{,}2602$

$\theta_3 = 74{,}9°$

**Exemple B.14** Une force **F** de 50N est appliquée au point P dans la direction du vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Exprimez **F** comme combinaison linéaire des vecteurs **i**, **j** et **k** si P = (–2, 0 , 4) et Q = (4 , 3 , –2).

Déterminons le vecteur direction $\overrightarrow{PQ}$:

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r}_{PQ} = (4-(-2))\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j} + (-2-4)\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

le vecteur cherché **F** cherché doit avoir la même direction que $\mathbf{r}_{PQ}$ mais une norme (une grandeur) de 50.

Transformons $\mathbf{r}_{PQ}$ en un vecteur unitaire **e**

$$|\mathbf{r}_{PQ}| = \sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{donc } \mathbf{e} = \frac{6}{9}\mathbf{i} + \frac{3}{9}\mathbf{j} - \frac{6}{9}\mathbf{k} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Comme $|\mathbf{F}| = 50$ et que **F** a la même direction que **e**, alors

$$\mathbf{F} = 50\mathbf{e} = \frac{100}{3}\mathbf{i} + \frac{50}{3}\mathbf{j} - \frac{100}{3}\mathbf{k}$$

**Exemple B.15** Soit les 3 points suivants dans l'espace :

$A = (4 , 3 , 2)$ $B = (8 , 8 , 4)$ $C = (6 , 1 , -2)$

Quel est l'angle entre les droites $AB$ et $AC$ ?

À l'aide du produit scalaire, on peut trouver l'angle entre deux vecteurs.
Trouvons les vecteurs direction $\mathbf{r}_{AB}$ et $\mathbf{r}_{AC}$

$$\mathbf{r}_{AB} = (8-4)\mathbf{i} + (8-3)\mathbf{j} + (4-2)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (6-4)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (-2-2)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_{AB}\ \mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AB}||\mathbf{r}_{AC}|}$$

Comme $\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AC} = (4)(2) + (5)(-2) + (2)(-4) = -10$ et

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{16 + 25 + 4} = \sqrt{45} = 6{,}71$$

$$|\mathbf{r}_{AC}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 4{,}90$$

$$\text{On aura } \cos\theta = \frac{-10}{\sqrt{45}\ \sqrt{24}} = -0{,}304$$

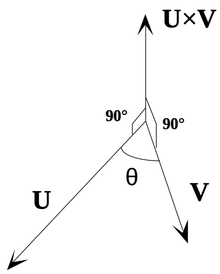
$$\theta = \arccos(-0{,}304) = 107{,}7°$$

# <u>Le produit vectoriel</u>

On a déjà vu que le produit scalaire permet de "multiplier" deux vecteurs, le résultat étant un scalaire et non un vecteur. Comme nous l'avions mentionné plus tôt, il existe une autre façon de multiplier 2 vecteurs: le <u>**produit vectoriel**</u>.
En anglais, on l'appelle "cross product" ou "vector product".
On le note **U** × **V**. À l'occasion, on rencontre également la notation **U** **V**.

Voyons en premier lieu ce que représente, du point de vue géométrique, le produit vectoriel des 2 vecteurs **U** et **V**.

Soit **U** et **V** deux vecteurs dans l'espace, **U** et **V** étant non nuls et non parallèles. Ces deux vecteurs délimitent un plan dans l'espace.
**U** × **V** nous donnera un nouveau vecteur, appelons-le $\vec{n}$ ou **n** , qui sera perpendiculaire (on dit <u>normal</u>) au plan engendré par **U** et **V**, c'est-à-dire que $\vec{n}$ sera perpendiculaire à chacun des vecteurs **U** et **V**. Cela laisse évidemment 2 options pour $\vec{n}$. Pour déterminer lequel choisir, on utilise de nouveau la règle de la <u>main droite</u>. Prenez votre main droite, pouce ouvert; pointez les 4 doigts de la main droite en direction de **U**. Lorsque vous repliez ces doigts vers le vecteur **V**, votre pouce indiquera la direction de $\vec{n}$ .
Le dessin suivant illustre le produit vectoriel.




La norme de **U** × **V** = $\vec{n}$ sera donnée par

$$|\mathbf{U} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}| \sin\theta$$

Si **e** est un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{n}$ , alors

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (\,|\,\mathbf{U}\,|\;\;|\,\mathbf{V}\,|\,\sin\theta)\,\mathbf{e}$$

Avec la règle de la main droite, on peut voir que

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\,\mathbf{V} \times \mathbf{U}$$

On rencontre le produit vectoriel dans une foule de domaines: en électricité et magnétisme, en mécanique des fluides, en mécanique, lorsqu'on rencontre des phénomènes où des rotations sont produites.

Par exemple, lorsqu'on visse un boulon à l'aide d'une clé anglaise, le couple produit (en anglais "torque") agit le long de l'axe du boulon pour le faire avancer. Cette force peut être représentée par un produit vectoriel de norme $|\mathbf{D} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{D}||\mathbf{F}| \sin\theta$, où $|\mathbf{D}|$ mesure la distance entre l'axe de rotation et l'endroit où la force **F** est appliquée. (Plus $|\mathbf{D}|$ est grand, plus le couple produit est grand : c'est l'effet de levier.)

$|\mathbf{F}|\sin(\theta)$ représente la composante de la force qui est perpendiculaire au bras de la clé anglaise. Si $\theta = 90°$, alors $|\mathbf{F}|\sin(\theta) = |\mathbf{F}|$ et c'est à ce moment que la valeur du couple produit est la plus élevée.

Si $\theta = 0°$ ou $180°$, alors $\sin(\theta) = 0$ et le produit vectoriel est nul. Dans l'exemple précédent, cela équivaut à dire que si l'on tire ou pousse sur la clé anglaise, le boulon ne bougera évidemment pas.

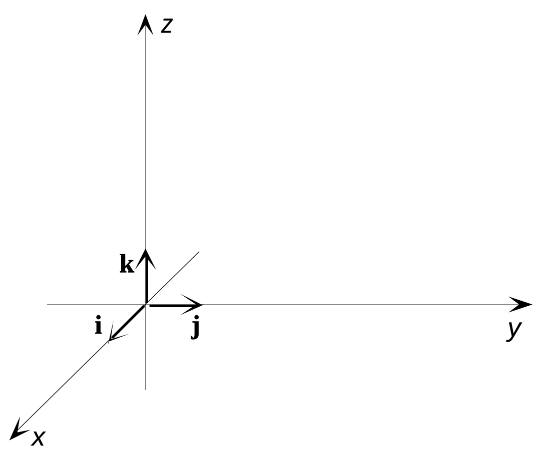
On en conclut que :

Si deux vecteurs **U** et **V** sont parallèles, ou si au moins un des deux vecteurs est nul, alors $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$.

On peut également montrer que

1- $a(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = (a\mathbf{U}) \times \mathbf{V} = \mathbf{U} \times (a\mathbf{V})$
2- $\mathbf{U} \times (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \times \mathbf{W})$

Lorsqu'on regarde notre système de coordonnées de base avec les vecteurs **i**, **j** et **k**, on constate que




| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ | $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ | $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ |
| $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ | $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ | $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ |
| $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ | $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ | $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ |

On peut utiliser les résultats précédents pour calculer algébriquement un produit vectoriel :

Soit $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ et $\mathbf{V} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \times \mathbf{V} &= 2\mathbf{i}(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + 3\mathbf{j}(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + (-4\mathbf{k})(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 10(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 4(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + 15(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - 3(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 6(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad - 20(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + 4(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 8(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= -2\mathbf{k} - 4\mathbf{j} - 15\mathbf{k} + 6\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 4\mathbf{i} \\ &= 2\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 17\mathbf{k}\end{aligned}$$

Une façon plus rapide est de prendre directement les bons produits pour calculer les coefficients de **i**, de **j** et de **k**. Lorsqu'on veut trouver le coefficient de **i** du résultat, on sait que $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ et donc que $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$

Donc $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\,(5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = [3{\cdot}2 - (-4){\cdot}(-1)]\,\mathbf{i} + [(-4){\cdot}5 - 2{\cdot}2]\,\mathbf{j} + [2{\cdot}(-1) - 3{\cdot}5]\,\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 17\mathbf{k}$

Lorsqu'on se rappelle comment calculer un déterminant, on peut systématiser ce calcul sans avoir à se souvenir du produit des vecteurs **i**, **j** et **k**.

<u>Rappels</u> : Un déterminant d'ordre 2 se calcule ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Un déterminant d'ordre 3 se calcule ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Remarque : les déterminants d'ordre 2 qui précèdent s'obtiennent en éliminant la ligne et la colonne contenant le coefficient $a_i$. Cette technique de calcul se nomme le développement selon la 1ère ligne. Il existe d'autres techniques de calcul mais celle-ci est la plus simple pour nos besoins.

Soit $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ et $\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

Alors $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

**Exemple B.16** Si $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ et $\mathbf{V} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,(6 - 4) - \mathbf{j}\,(4 + 20) + \mathbf{k}\,(-2 - 15)$$
$$= 2\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 17\mathbf{k}$$

Après quelques exercices, on peut calculer assez rapidement sans avoir à écrire tous les détails.

**Exemple B.17** Soit le calcul du déterminant : $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Si on retranche la ligne et la colonne contenant **i**, il nous reste un déterminant d'ordre 2 qui vaut $4 - 28 = -24$. On procède de façon semblable pour **j** et **k** en procédant directement au calcul:

Donc on aura $-24\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\,(6-(-7)) + \mathbf{k}\,(12-(-2)) = -24\,\mathbf{i} - 13\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$.

## Exercices:

*10- Soit $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ $\mathbf{V} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ $\mathbf{W} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

a) déterminez $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ , $-3(\mathbf{V}-\mathbf{W})$ , $|\mathbf{V}+\mathbf{W}|$

b) que signifie le fait que **V** n'ait pas de composante en **j** ?

c) évaluez $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ et l'angle entre ces deux vecteurs.

d) déterminez un vecteur unitaire dans la direction de **U**+**V** . Quel est l'angle entre **U**+**V** et la direction positive de l'axe des $x$ ? ( on veut $\theta_x$ )

e) est-ce que les vecteurs **V** et **W** sont perpendiculaires ? parallèles ?

f) calculez $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ et indiquez en mots ce que représente ce résultat.

11- Un vecteur position **U** dans l'espace forme un angle de 40° avec l'axe positif des $x$ et un angle de 120° avec l'axe positif des $y$. De plus la norme de **U** est de 15 unités et la composante scalaire de **U** en $z$ est positive.

a) exprimez **U** comme combinaison linéaire de **i**, **j** et **k**

b) quel est l'angle entre **U** et la direction positive de l'axe des $z$ ?

12- Soient les 3 points suivants : $A = (4\ ,-1\ ,\ 3)$ $B = (2\ ,\ 5\ ,-1)$ $C = (-1\ ,-2\ ,\ 0)$

a) déterminez l'angle entre les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ?

b) une force de 100N est appliquée dans la direction du vecteur $\vec{AB}$ . Déterminez **F** en fonctions des vecteurs unitaires **i**, **j** et **k** .

## **Réponses**

1- longueur de 30,2 $\theta = 25{,}2°$

2- $|\mathbf{F}_1| = 176{,}9\text{N}$ $|\mathbf{F}_2| = 217\text{N}$

3- 1 409,5 joules

4- a) l'angle entre les vecteurs est supérieur à 90°

b) $\theta = 100{,}8°$

5- a) $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

b) non, car $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} \neq 0$

c) oui, car $\mathbf{W} = -\frac{1}{2}\mathbf{V}$

d) $R = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

e) $\frac{4\sqrt{10}}{5}\mathbf{i} - \frac{12\sqrt{10}}{5}\mathbf{j}$

6- $U = 8{,}55\mathbf{i} + 23{,}49\mathbf{j}$

7- a) $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

b) $0{,}78\mathbf{i} - 0{,}62\mathbf{j}$

c) $\theta = -38{,}7°$

8- a) $\theta = 132{,}3°$

b) $\theta = 144{,}2°$

9- a) $\theta = 73{,}1°$

b) 1,2 unités

10- a) $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $21\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$ $\sqrt{14}$

b) qu'il est contenu dans le plan *x-z*

*c)* $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = -10$ et $\theta = 126{,}7°$

d) $-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$ et $\theta_x = 122{,}3°$

e) ne sont pas perpendiculaires car $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} \neq 0$ ,

ne sont pas parallèles car **V** n'est pas un multiple de **W**

f) $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -6\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$ représente un vecteur qui est à la fois à **U** et à **V**

11- a) $11{,}5\mathbf{i} - 7{,}5\mathbf{j} + 6{,}1\mathbf{k}$

b) $\theta_z = 66{,}2°$

12- a) $\theta = 68{,}8°$

b) $F = 26{,}7\mathbf{i} + 80{,}2\mathbf{j} - 53{,}5\mathbf{k}$