Section 5.4 . Vous trouverez les solutions des numéros: 1a), 2a), 3h), 4i), 5a), 6, 8a), 9a), 10a), 11l), 12a), 14a), 15a) et 17e).

1- a) On peut traduire en logarithme à base 10 puisque la fonction exponentielle est à base 10 :

$$\log 0{,}0001 = \log 10^{-4}$$

$$\log 0{,}0001 = -4$$

On pourrait traduire en logarithme naturel : $\ln 0{,}0001 = \ln 10^{-4}$

$$\ln 0{,}0001 = -4 \ln 10$$

2- a) Par définition des logarithmes, $\log_b a = Z \quad \Rightarrow \quad b^Z = a$.

On a donc $\log_5 125 = 3 \quad \Rightarrow \quad 5^3 = 125$.

3- h) Utilisons la relation de changement de base dans les logarithmes $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$:

$$\log_5 23 = \frac{\ln 23}{\ln 5} = \frac{3{,}135}{1{,}609} = 1{,}948$$

Si jamais vous oubliez la formule de changement de base, vous pouvez quand même résoudre l'équation en l'exprimant sous forme exponentielle. Puisqu'on cherche à évaluer $\log_5 23$, alors on pose $x = \log_5 23$ et on cherche la valeur de *x* :

$x = \log_5 23 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 23$ en exprimant l'équation sous forme exponentielle

$\ln 5^x = \ln 23 \quad \Rightarrow \quad x \ln 5 = \ln 23$ on a ré-exprimé l'équation sous forme logarithmique, mais dans une base qu'on peut évaluer ; puis on a appliqué la propriété numéro 7 des logarithmes.

$x = \dfrac{\ln 23}{\ln 5} = \dfrac{3{,}135}{1{,}609} = 1{,}948$ on a isolé *x* et on l'a évalué.

4- i) Par définition, $b^{\log_b x} = x$ quelle que soit la valeur de *b*.

Donc $10^{\log_{10} x} = x$ et par conséquent $x = 33$.

5- a) Posons $\log_5 1 = x$. Alors $5^x = 1$. Le seul exposant qu'on puisse mettre à 5 pour obtenir 1 est 0.

Donc $x = 0$.

6- Nous n'en calculerons que quelques-uns pour montrer la technique :

log 0 n'existe pas puisque 0 n'est pas dans le domaine de la fonction log.

log 1 = 0 toujours, quelle que soit la base du logarithme.

$\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0{,}301 = 0{,}602$

ou bien $\log 4 = \log\left(2^2\right) = 2 \log 2 = 2 \cdot 0{,}301 = 0{,}602$

On vous laisse les autres.

8- a) $\log_b \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3} = \log_b \sqrt{x-1} - \log x^3$

$= \log_b (x-1)^{1/2} - 3\log_b x$

$= \dfrac{1}{2}\log_b (x-1) - 3\log_b x$

9- a) $\dfrac{7^{x+2}}{7^{2-x}} = 7^{x+2} \cdot 7^{-(2-x)} = 7^{x+2} \cdot 7^{-2+x} = 7^{x+2-2+x}$

$= 7^{2x}$

10-a) Si $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$, alors les exposants doivent être égaux, c'est-à-dire $5x - x^2 = -6$.

On résout donc $x^2 - 5x - 6 = 0$; en décomposant en facteurs, $(x-6)(x+1) = 0$.

$x = 6$ ou $x = -1$.

11-l) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2$

$e^x - \dfrac{1}{e^x} = 2 \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2e^x$ en multipliant toute l'équation par e^x.

On pose $u = e^x$, ce qui donne $e^{2x} = \left(e^x\right)^2 = u^2$. On peut remarquer tout de suite que u doit être positif puisque e^x est sûrement positif.

On résoudra donc $u^2 - 2u - 1 = 0$

$\Rightarrow u = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Comme on l'a noté un peu plus haut, il faut que u soit positif. On rejette donc la solution $u = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2}$.

On ne garde que $u = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}$, et on obtient $x = \ln u = \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\right) = \ln 2{,}4142 = 0{,}8814$

12- a) Il faut exprimer l'équation sous forme exponentielle : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2x+1$

$x = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

14- a) On part du graphe de $y = 2^x$, qui passe par le point (0,1), et on lui fait subir une translation horizontale de 1 unité vers la droite puisqu'on a x–1. C'est comme ça qu'on obtient le point (1,1).

15- a) Commençons par diviser l'équation par 10 : $\dfrac{D}{10} = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

On exprime maintenant l'équation sous forme exponentielle : $10^{D/10} = \dfrac{I}{I_0}$

Et finalement on multiplie par I_0 : $I = I_0 10^{D/10}$

17- e) Posons $y = f^{-1}(x)$. On va isoler y dans $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(y)$.

Calculons $f(y) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$.

On a à résoudre pour y : $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$

$$x = \dfrac{e^y + \dfrac{1}{e^y}}{e^y - \dfrac{1}{e^y}} = \dfrac{\dfrac{e^{2y}+1}{e^y}}{\dfrac{e^{2y}-1}{e^y}}$$

$$x = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

Voilà une bonne étape de faite. On continue en isolant e^{2y} avant de vraiment isoler y.

$x\left(e^{2y}-1\right) = e^{2y}+1 \quad \Rightarrow \quad x\,e^{2y} - x = e^{2y}+1$

$$x\,e^{2y} - e^{2y} = x + 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2y}\,(x-1) = x+1$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$2y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$