Chapitre 2 – Exercices de la section 2.5

n° 3 La multiplication de deux facteurs contenant plus d'un terme peut se faire de plus d'une façon, en voici deux.

$$\begin{aligned}(x^3+8)(3x^2+x-8) &= x^3(3x^2+x-8)+8(3x^2+x-8)\\ &= 3x^{3+2}+x^{3+1}-8x^3+24x^2+8x-64\\ &= 3x^5+x^4-8x^3+24x^2+8x-64\end{aligned}$$

En distribuant plutôt l'autre facteur, on obtient la même réponse.

$$\begin{aligned}(x^3+8)(3x^2+x-8) &= (x^3+8)3x^2+(x^3+8)x+(x^3+8)(-8)\\ &= 3x^{3+2}+24x^2+x^{3+1}+8x-8x^3-64\\ &= 3x^5+24x^2+x^4+8x-8x^3-64\\ &= 3x^5+x^4-8x^3+24x^2+8x-64\end{aligned}$$

n° 6 On constate que chacun des termes de la somme $6x^4-8x^3-2x^2$ est un multiple de $2x^2$,

$$6x^4-8x^3-2x^2=2x^2(3x^2)+2x^2(-4x)+2x^2(-1)$$

on met alors $2x^2$ en évidence : $6x^4-8x^3-2x^2=2x^2(3x^2-4x-1)$. On peut vérifier qu'on a bien effectué l'opération de mise en évidence en faisant l'opération contraire, la distribution : $2x^2(3x^2-4x-1)=6x^{2+2}-8x^3-2x^2=6x^4-8x^3-2x^2$.

n°10 Le terme $5x(x+1)$ contient les facteurs 5, x et x+1 et le terme $-3(x+1)$ contient les facteurs –3 et x+1. Nous pouvons donc mettre le facteur x+1 en évidence.

$$5x(x+1)-3(x+1)=(5x-3)(x+1)$$

n° 14 On peut effectuer une double mise en évidence pour obtenir la factorisation du polynôme $x^2-2x+3x-6$. En effet, en groupant les termes deux à deux on trouve la factorisation suivante.

$$\underline{x^2-2x}+\underline{3x-6}=x(x-2)+3(x-2)=(x+3)(x-2)$$

n° 22 Si $2x^2+5x-3$ se factorise davantage relativement aux nombres entiers ce sera comme produit de deux facteurs linéaires $2x^2+5x-3=(2x+\alpha)(x+\beta)$. Il y aura un facteur $2x+\alpha$

et un facteur $x+\beta$ puisque 2 (le coefficient de x^2) est un nombre premier (un nombre premier est un nombre naturel différent de 1 qui n'est divisible que par 1 et par lui même). De plus, puisque

$$(2x+\alpha)(x+\beta) = 2x^2 + 2x\beta + \alpha x + \alpha\beta = 2x^2 + (2\beta+\alpha)x + \alpha\beta$$

on cherche maintenant les entiers α et β de telle sorte que

$$2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + (2\beta+\alpha)x + \alpha\beta.$$

Pour que ces deux polynômes soient égaux on constate, en comparant les coefficients, qu'il faut que $2\beta+\alpha = 5$ et que $\alpha\beta = -3$. Dressons la liste des possibilités (en nombres entiers) pour que $\alpha\beta = -3$.

α	β	$\alpha\beta$	$2\beta+\alpha$
1	–3	–3	–5
–1	3	–3	5
3	–1	–3	1
–3	1	–3	–1

Ainsi, la seule possibilité qui nous intéresse est $\alpha=-1$ et $\beta=3$. Il suffit maintenant de remplacer ces valeur dans $2x^2 + 5x - 3 = (2x+\alpha)(x+\beta)$ et on obtient

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3).$$

Pour vérifier notre factorisation, il suffit d'effectuer le produit...

n° 24 Si $x^2 - 4xy - 12y^2$ se factorise relativement aux nombres entiers ce sera comme produit de deux facteurs linéaires en x et en y, $x^2 - 4xy - 12y^2 = (x+\alpha y)(x+\beta y)$. Il y aura un facteur $(x+\alpha y)$ et un facteur $(x+\beta y)$ puisque le coefficient de x^2 est 1 et le coefficient y^2 est –12. De plus, puisque

$$x^2 - 4xy - 12y^2 = (x+\alpha y)(x+\beta y) = x^2 + \alpha xy + \beta xy + \alpha\beta y^2 = x^2 + (\alpha+\beta)xy + \alpha\beta y^2$$

on cherche maintenant les entiers α et β de telle sorte que

$$x^2 - 4xy - 12y^2 = x^2 + (\alpha+\beta)xy + \alpha\beta y^2.$$

Pour que ces deux polynômes soient égaux il faut que $\alpha+\beta = -4$ et que $\alpha\beta = -12$. Si l'on dresse la liste des possibilités (en nombres entiers) pour que $\alpha\beta = -12$ et que $\alpha+\beta = -4$, on constate que $\alpha=-6$ et $\beta=2$ est une «combinaison gagnante». Il suffit maintenant de remplacer ces valeurs dans $(x+\alpha y)(x+\beta y)$ pour obtenir

$$x^2 - 4xy - 12y^2 = (x-6y)(x+2y).$$

Pour vérifier notre factorisation, il suffit d'effectuer le produit...

n° 26 Si x^2+x-4 se factorise relativement aux nombres entiers, ce sera comme produit de deux facteurs linéaires en x, $x^2+x-4=(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$. Il suffit maintenant de trouver α et β qui font en sorte que $\alpha+\beta=1$ tandis que $\alpha\beta=-4$. On cherche donc deux nombres entiers dont la somme est 1 et dont le produit est –4. Dressons la liste des possibilités pour que $\alpha\beta=-4$.

α	β	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$
1	–4	–4	–3
–1	4	–4	3
2	–2	–4	0
–2	2	–4	0
4	–1	–4	3
–4	1	–4	–3

On constate qu'il n'y a aucune solution. On en conclut que x^2+x-4 ne se factorise pas relativement aux nombres entiers.

n° 36 Pour factoriser $2y^3-22y^2+48y$ on commence par la mise en évidence de tous les facteurs communs, $2y^3-22y^2+48y=2y\left(y^2-11y+24\right)$. Il faut maintenant factoriser, si possible, le polynôme $y^2-11y+24$. Si $y^2-11y+24$ se factorise relativement aux nombres entiers on aura

$$y^2-11y+24=(y+\alpha)(y+\beta)=y^2+(\alpha+\beta)y+\alpha\beta.$$

On cherche donc deux entiers dont la somme est –11 tandis que leur produit est 24. Le cas $\alpha=-8$ et $\beta=-3$ fonctionne bien, on a donc $y^2-11y+24=(y-8)(y-3)$ et

$$2y^3-22y^2+48y=2y\left(y^2-11y+24\right)=2y(y-8)(y-3).$$

n° 42 On commence par la mise en évidence de tous les facteurs communs à tous les termes. Il s'agit ensuite d'utiliser la différence de carrés $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$ avec $u=x$ et $v=3y$ pour obtenir la factorisation suivante.

$$x^3y-9xy^3=xy\left(x^2-9y^2\right)=xy\left(x^2-(3y)^2\right)=xy(x-3y)(x+3y)$$

n° 46 On peut utiliser le produit remarquable $u^3+v^3=(u+v)\left(u^2-uv+v^2\right)$ pour factoriser le polynôme $m^3+n^3=(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)$ puisqu'il s'agit d'une somme de cubes avec $u=m$ et $v=n$. On peut constater que le polynôme m^2-mn+n^2 ne se factorise pas davantage relativement aux nombres entiers puisque les coefficients de m^2 et de n^2 sont 1 et que $(m+n)(m+n)=m^2+2mn+n^2$.

n° 53 On effectue d'abord la mise en évidence de tous les facteurs communs.

$$6(3x-5)(2x-3)^2+4(3x-5)^2(2x-3)=2(3x-5)(2x-3)\left[3(2x-3)+4(3x-5)\right]$$

On simplifie maintenant le facteur $\left[3(2x-3)+4(3x-5)\right]$ en effectuant la distribution des constantes et puis le regroupement des termes semblables.

$$\begin{aligned}6(3x-5)(2x-3)^2+4(3x-5)^2(2x-3)&=2(3x-5)(2x-3)\left[3(2x-3)+4(3x-5)\right]\\&=2(3x-5)(2x-3)\left[6x-9+12x-20\right]\\&=2(3x-5)(2x-3)(18x-29)\end{aligned}$$

n° 59 Le plus petit dénominateur commun à $\dfrac{2}{5b}-\dfrac{4}{3a^3}-\dfrac{1}{6a^2b^2}$ est $2\ \ 3\ \ 5\ \ a^3b^2$. C'est donc en terme de celui-ci qu'on doit exprimer chacun des termes de l'expression à simplifier.

$$\begin{aligned}\frac{2}{5b}-\frac{4}{3a^3}-\frac{1}{6a^2b^2}&=\frac{2}{5b}\ \frac{2\ \ 3\ \ a^3b}{2\ \ 3\ \ a^3b}-\frac{4}{3a^3}\ \frac{2\ \ 5\ \ b^2}{2\ \ 5\ \ b^2}-\frac{1}{6a^2b^2}\ \frac{5\ \ a}{5\ \ a}\\&=\frac{2\left(2\ \ 3\ \ a^3b\right)}{2\ \ 3\ \ 5\ \ a^3b^2}-\frac{4\left(2\ \ 5\ \ b^2\right)}{2\ \ 3\ \ 5\ \ a^3b^2}-\frac{1(5\ \ a)}{2\ \ 3\ \ 5\ \ a^3b^2}\\&=\frac{2\left(2\ \ 3\ \ a^3b\right)-4\left(2\ \ 5\ \ b^2\right)-1(5\ \ a)}{2\ \ 3\ \ 5\ \ a^3b^2}\\&=\frac{12a^3b-40b^2-5\ \ a}{30a^3b^2}\end{aligned}$$

n° 62 Voici deux approches qui permettent de simplifier l'expression $\dfrac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}$.

La première approche consiste à mettre le numérateur et le dénominateur sur le dénominateur commun à leurs termes, de transformer le quotient de quotients en produit de quotients et d'effectuer les simplifications des facteurs communs.

$$\frac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}=\frac{\frac{u^2-1}{u}}{\frac{u^2-1}{u^2}}=\frac{u^2-1}{u}\ \frac{u^2}{u^2-1}=\frac{\left(u^2-1\right)u^2}{u\left(u^2-1\right)}=\left(u^2-1\right)^{1-1}u^{2-1}=u$$

La deuxième approche consiste à multiplier l'expression complète par un 1 «statégique».

$$\frac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}=\frac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}\;\frac{u^2}{u^2}=\frac{\left(u-\frac{1}{u}\right)u^2}{\left(1-\frac{1}{u^2}\right)u^2}=\frac{u^3-u}{u^2-1}=\frac{u\left(u^2-1\right)}{u^2-1}=u$$

n° 63 On simplifie le dénominateur de l'expression $\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ en le multipliant par son conjugué. En effet,

$$\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=3^2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-\sqrt{5}^2=9-5=4$$

ceci nous permet alors d'effectuer la simplification suivante.

$$\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\;\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{4}=\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$$

n° 68 Pour factoriser $(y-b)^2-y+b$, on met d'abord –1 en évidence dans les deux derniers termes. Par la mise en évidence de $(y-b)$ on obtient la factorisation finale.

$$(y-b)^2-y+b=(y-b)^2-(y-b)=(y-b)(y-b-1)$$

n° 82 Pour simplifier le processus de factorisation, posons $x=A+B$

$$4(A+B)^2-5(A+B)-6=4x^2-5x-6.$$

Si $4x^2-5x-6$ se factorise relativement aux nombres entiers, deux cas sont possibles $4x^2-5x-6=(x+\alpha)(4x+\beta)$ ou bien $4x^2-5x-6=(2x+\alpha)(2x+\beta)$. Examinons le premier cas, $4x^2-5x-6=(2x+\alpha)(2x+\beta)$. Puisque

$$4x^2-5x-6=(x+\alpha)(4x+\beta)=4x^2+4\alpha x+\beta x+\alpha\beta=4x^2+(4\alpha+\beta)x+\alpha\beta,$$

en comparant les coefficients, on aura une égalité seulement si $4\alpha+\beta=-5$ et $\alpha\beta=-6$. En dressant la liste des possibilités on constate que $\alpha=-2$ et $\beta=3$ satisfont aux deux conditions. Ainsi, $4x^2-5x-6=(x-2)(4x+3)$ et, en remplaçant x par $A+B$, on trouve

$$4(A+B)^2-5(A+B)-6=(A+B-2)(4A+4B+3).$$

Puisque nous avons trouvé une factorisation, il est inutile d'étudier la deuxième possibilité.

n° 90 On commence par la mise en évidence des facteurs communs et par la suite, on remarque la différence de carrés qu'on factorise à l'aide des produits remarquables.

$$18a^3 - 8a\left(x^2 + 8x + 16\right) = 2a\left[9a^2 - 4(x+4)^2\right] \qquad \text{mise en évidence de } 2a$$

$$= 2a\left[(3a)^2 - \left(2(x+4)\right)^2\right] \qquad \text{différence de carrés}$$

$$= 2a\left(3a - 2(x+4)\right)\left(3a + 2(x+4)\right)$$

$$= 2a(3a - 2x - 8)(3a + 2x + 8)$$

n° 95 On utilise les produits remarquables $u^2 - 2uv + v^2 = (u-v)^2$ et $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ pour factoriser les dénominateurs des différents termes de l'expression à simplifier pour ensuite en déterminer le dénominateur commun. En fait, l'expression $m^2 - 4m + 4$ est un carré parfait, $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$, $m^2 - 4$ est une différence de carrés, $m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$, et $2 - m$ s'exprime aussi comme $-(m - 2)$. Le plus petit dénominateur commun au trois termes de l'expression initiale est donc $(m-2)^2(m+2)$.

$$\frac{m-1}{m^2 - 4m + 4} + \frac{m+3}{m^2 - 4} + \frac{2}{2-m}$$

$$= \frac{m-1}{(m-2)^2} + \frac{m+3}{(m-2)(m+2)} + \frac{2}{-(m-2)} \qquad \text{factorisation}$$

$$= \frac{m-1}{(m-2)^2}\,\frac{m+2}{m+2} + \frac{m+3}{(m-2)(m+2)}\,\frac{m-2}{m-2} + \frac{2}{-(m-2)}\,\frac{(m-2)(m+2)}{(m-2)(m+2)}$$

$$= \frac{(m-1)(m+2) + (m+3)(m-2) - 2(m-2)(m+2)}{(m-2)^2(m+2)} \qquad \text{dénominateur commun}$$

$$= \frac{\left(m^2 + m - 2\right) + \left(m^2 + m - 6\right) - 2\left(m^2 - 4\right)}{(m-2)^2(m+2)} \qquad \text{calculs des produits}$$

$$= \frac{2m}{(m-2)^2(m+2)} \qquad \text{regroupement des termes semblables}$$

n° 98 On élimine d'abord les exposants négatifs des expressions algébriques afin de les simplifier.

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{-1}-b^{-1}}{ab^{-2}-ba^{-2}} &= \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}} \\
&= \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}} && \text{mise au dénominateur commun} \\
&= \frac{b-a}{ab}\ \frac{a^2b^2}{a^3-b^3} && \text{division traduite en produit} \\
&= \frac{(b-a)a^{2-1}b^{2-1}}{a^3-b^3} && \text{simplification des facteurs communs} \\
&= \frac{(b-a)ab}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)} && \text{factorisation de } a^3-b^3 \\
&= \frac{-ab}{a^2+ab+b^2} && \text{simplification : } \frac{b-a}{a-b}=-1
\end{aligned}
$$

n° 103 Le but de cet exercice est de faire de la «reconnaissance de forme».

$$
\frac{4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^{1/2}-3}{2x^{1/2}} = \frac{4x^{1/2}}{2x^{1/2}} - \frac{3}{2x^{1/2}} = 2x^0 - \frac{3}{2}x^{-1/2}
$$

n° 104 Évaluer x^2-4x+1 avec $x=2-\sqrt{3}$ signifie qu'on substitue la valeur $2-\sqrt{3}$ à x dans l'expression x^2-4x+1.

$$
\begin{aligned}
\left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(2-\sqrt{3}\right)+1 &= \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)-4\left(2-\sqrt{3}\right)+1 \\
&= \left(4-4\sqrt{3}+3\right)-8+4\sqrt{3}+1=0
\end{aligned}
$$

n° 114 Les calculs se font en utilisant les propriétés des exposants fractionnaires.

$$
\sqrt[n+1]{x^{n^2}x^{2n+1}} = \left(x^{n^2+2n+1}\right)^{1/n+1} = \left(x^{(n+1)^2}\right)^{1/n+1} = x^{(n+1)^2/n+1} = x^{n+1}
$$