Annexe A: dérivées et intégrales : un bref survol

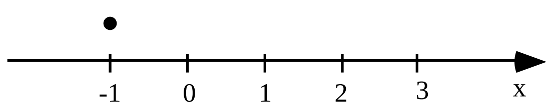
Bien que vous ayez déjà vu une partie de ces sujets au niveau collégial et qu'en MAT-115 ils seront revus en détails, on peut néanmoins examiner rapidement ce que représente une dérivée ou une intégrale pour comprendre l'importance de ces sujets en sciences et en génie.

LA DÉRIVÉE

Considérons le problème physique suivant: on veut étudier le mouvement d'une particule (ou d'un objet) dans une direction donnée; il s'agit d'un **mouvement rectiligne.**

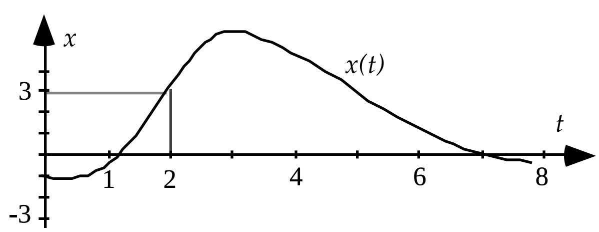
Posons $x(t)$: la position de l'objet au temps t. (La position de l'objet est en mètres (m) et le temps est en secondes (s)).

Pour étudier ce mouvement, on doit établir un référentiel, c'est-à-dire une origine et une direction positive.



On a ici un graphique qui représente un objet qui se situe un mètre à gauche de l'origine.

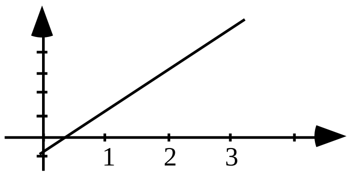
Soit ,pour une expérience donnée, le graphique suivant qui représente la fonction $x(t)$:



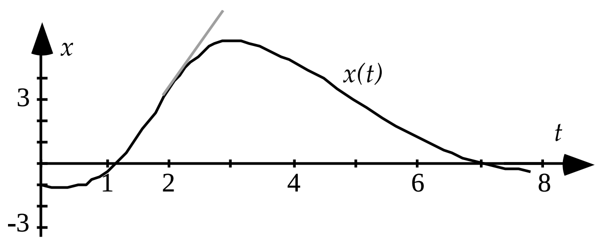
, où t varie entre 0 et 8 secondes.

La quantité $x(2) - x(0) = 3 - (-1) = 4$ m. représente la variation de la position pendant les 2 premières secondes. Si on divise ce résultat par le temps écoulé, c'est-à-dire 2 secondes, on obtient la vitesse moyenne = 2 m / s.

Et si on voulait la vitesse à l'instant t = 2s.? En regardant le graphique, on voit que la vitesse de l'objet a varié pendant l'expérience. En effet, si la vitesse avait été constante à 2 m/s, on aurait eu le mouvement suivant:



La vitesse est alors égale à la pente de la droite précédente. Si on veut connaître la vitesse à un instant précis, on pourrait mesurer celle-ci en demandant que la vitesse arrête de varier à cet instant.



Sur le graphique précédent, la courbe pleine représente la position de l'objet en fonction du temps. À partir de t = 2s, la droite pointillée représente la position si la vitesse demeurait constante et égale à sa valeur à cet instant.

Donc, pour connaître la valeur de la vitesse à t = 2s., il suffit d'évaluer la pente de la droite pointillée. Et on remarque que cette droite est tangente à la courbe en t = 2.

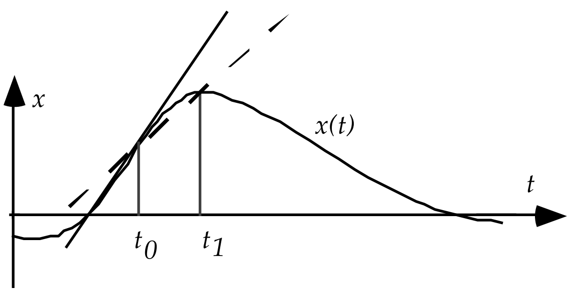
Finalement, pour avoir la vitesse de l'objet à un instant t_0 donné, on n'a qu'à tracer la tangente à la courbe position à cet instant t_0 et calculer la pente de cette droite. Malheureusement, si on veut connaître la vitesse à plusieurs moments différents, ce travail peut devenir fastidieux. De plus, tracer une tangente peut s'avérer difficile à appliquer en pratique.

On peut cependant approximer la vitesse en t_0 de la façon suivante:

choisir $t_1 > t_0$ de telle façon que $t_1 - t_0$ soit très petit.

alors $v(t_0) \cong \dfrac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1 - t_0}$

En effet, si t_1 est proche de t_0, alors la vitesse moyenne de t_0 à t_1 sera proche de la vitesse réelle à t_0.



On voit graphiquement qu'approximer la pente de la droite tangente peut se faire à l'aide de la pente d'une droite sécante. On peut voir que si t_1 tend vers t_0, alors à la limite les deux quantités [$x(t_1)$ et $x(t_0)$] vont coïncider. Pensons au fonctionnement d'un radar pointé sur une auto. C'est cette procédure qui est utilisée pour afficher la vitesse de l'automobile. L'appareil estime, pour de petits intervalles de temps, la distance parcourue et en déduit la vitesse.

La procédure que nous venons de décrire correspond à la définition de la dérivée d'une fonction en un point donné. Et c'est pour cette raison qu'on dit que la dérivée de la fonction position donne la fonction vitesse.

Attention: La procédure décrite plus haut permet d'estimer la vitesse en un point; c'est un nombre. Comme, en général, la position varie selon le temps, cela implique que la vitesse varie aussi dans le temps. On pourra donc exprimer la vitesse comme une fonction du temps.

La force du calcul différentiel réside dans le fait suivant: si on possède une expression mathématique pour la fonction position d'un objet, alors en utilisant la notion de dérivée, on peut déterminer une expression mathématique pour la fonction vitesse.

Exemple A.1 si $x(t) = t^2 – 1$ mètres, alors $v(t) = 2t$ m / s (On verra ça plus loin)

À $t = 2$ s., l'objet en mouvement est donc situé $2^2 – 1 = 3$ m. à droite de l'origine et sa vitesse à cet instant précis est de $2·2 = 4$ m / s.

Remarque: ce n'est que lorsqu'on donne une valeur à t dans $v(t)$ qu'on obtient la pente d'une droite tangente à la courbe $x(t)$.

La discussion que nous venons d'avoir peut se généraliser à n'importe quelle quantité physique que l'on désire étudier.

Si on a une quantité $q(t)$ variable dans le temps et qu'on désire connaître le taux de variation moyen de cette fonction entre $t = t_0$ et $t = t_1$, on n'a qu'à calculer $\frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}$. Par contre, si on veut connaître le taux de variation instantané de cette fonction $q(t)$ à un instant t_0 donné, on pourra utiliser la même méthode que celle décrite dans notre exemple et utiliser la notion de dérivée pour calculer la valeur cherchée.

Dans le cas où $q(t) = v(t)$ la vitesse d'un objet au temps t, alors la dérivée de $v(t)$ donne le taux de variation instantané de $v(t)$, ce qui représente l'accélération $a(t)$.

Si $q(t) = T(t)$ représente la température d'un liquide, alors la dérivée de $T(t)$ représente la "vitesse" à laquelle la température varie. (Si $T(t)$ est en ˚C, la dérivée sera en ˚C / s).

RÈGLES DE DÉRIVATION ET NOTATIONS

Soit $q(t)$ une fonction de la variable t. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut utiliser seulement la lettre q pour désigner cette fonction. On s'intéresse au taux de variation instantané de q (la variable dépendante) en fonction du temps t (la variable indépendante). Il s'agit d'une opération qu'on veut effectuer sur la fonction q. L'opération "calculer le taux de variation instantané de q" se note $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q)$. Le résultat de l'opération se note $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. On dit que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est l'**opérateur** "prendre la dérivée de ce qui suit"; on l'appelle l'**opérateur "dérivée"**.

Rappelons-nous la discussion qu'on a eue plus tôt sur le sujet. Les deux résultats suivants sont triviaux:

1- si $q(t) = \mathrm{C}$ une constante, alors $q(t)$ ne varie pas et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0$.

2- si $q(t) = at + b$ une droite, où a et b sont deux constantes quelconques, alors $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = a$, la pente de la droite.

On peut également noter l'opération "prendre la dérivée" par la notation apostrophe. On utilise cette notation couramment, s'il n'y a pas d'ambiguïté quant à la variable indépendante.

On aurait, par exemple, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t-5) = (4t-5)' = 4$.

Considérons la fonction vitesse d'un objet. Nous avons vu que l'accélération s'obtient en prenant la dérivée de cette fonction:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \quad \text{Mais } v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \quad \text{Donc } a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

La fonction accélération est la dérivée deuxième de la fonction position. C'est dire que si nous avons une fonction qui nous donne la position d'un objet en mouvement, on obtiendra l'accélération de cet objet en dérivant la fonction position deux fois.

On peut également s'intéresser à la dérivée de la fonction v (vitesse), cette fois par rapport à la position x, plutôt que par rapport au temps t: on cherche $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

Si on veut appliquer les règles de dérivation pour calculer $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, il faut exprimer v comme fonction de x. On utilisera le résultat suivant:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Exemple A.2 soit $x(t) = t^2 – 1$ mètres, avec $t \geq 0$. Trouvons la vitesse quand $x = 8\text{m}$.

On a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) = 2t$ (nous verrons cette règle une peu plus loin)

Mais si $x = t^2 – 1$, alors $x + 1 = t^2$ et $t = \sqrt{x + 1}$ (car $t \geq 0$)

Donc, puisque $v = 2t$, on obtient $v = 2\sqrt{x + 1}$ m / s

Si l'objet est à la position $x = 8$ m., alors la vitesse est de $v(8) = 2\sqrt{8 + 1} = 6$ m / s.

Le taux de variation de la vitesse par rapport à la position est donc

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2t} \cdot 2 = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

L'opérateur dérivée est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

1° $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r + s) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ où r et s sont 2 fonctions dérivables (pour lesquelles la dérivée existe)

2° $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c \cdot r) = c \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ si c est une constante.

Par contre, la dérivée d'un produit de 2 fonctions n'égale pas le produit des dérivées:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \cdot s) \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

On a plutôt les 2 propriétés suivantes, pour les produits et les quotients:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \cdot s) = r' \cdot s + r \cdot s' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r' \cdot s – r \cdot s'}{s^2}$$

Le tableau suivant donne les principales règles de dérivation et résume les principales propriétés de la dérivée. a, b, c et n sont des constantes; e est la constante qui vaut 2,71828…

1-	$\frac{d}{dt}(c) = 0$	$c \in \mathbb{R}$
2-	$\frac{d}{dt}(at + b) = a$	$a, b \in \mathbb{R}$
3-	$\frac{d}{dt}(t^n) = n \cdot t^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
4-	$\frac{d}{dt}(e^{at}) = a \cdot e^{at}$	$a \in \mathbb{R}$
5-	$\frac{d}{dt}[\sin(at)] = a \cos(at)$	$a \in \mathbb{R}$
6-	$\frac{d}{dt}[\cos(at)] = -a \sin(at)$	$a \in \mathbb{R}$
7-	$\frac{d}{dt}(at + b)^n = a \cdot n\,(at + b)^{n-1}$	$a, n \in \mathbb{R}$

Exemples A.3

a) $x(t) = t^2 - 1$ $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) = 2t$

b) $x(t) = e^{-3t}$ $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) = -3\, e^{-3t}$

c) $x(t) = (2t+1)^4$ $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) = 2 \cdot 4\,(2t+1)^3$

d) $x(t) = \sqrt{3t+5} = (3t+5)^{1/2}$ $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) = 3\ \frac{1}{2}\left(3t+5\right)^{\frac{1}{2}-1}$

$$= \frac{3}{2}(3t+5)^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{3t+5}}$$

e) $q(t) = e^{-10t} + 4\cos(5t)$ $\quad \frac{dq}{dt} = -10e^{-10t} - 4 \cdot 5\sin(5t) = -10e^{-10t} - 20\sin(5t)$

f) $x(t) = (t^2+1)\, e^{-3t}$ $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) = (t^2+1)'\, e^{-3t} + (t^2+1)\left(e^{-3t}\right)'$

$$= 2t\, e^{-3t} + (t^2+1)\left(-3e^{-3t}\right)$$

$$= 2t\, e^{-3t} - 3\,(t^2+1)\, e^{-3t}$$

g) $q(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ $\quad \frac{dq}{dt} = \frac{[\sin(t)]' \cdot t - \sin(t) \cdot [t]'}{t^2} = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$

$$= \frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2}$$

h) Si $x(t) = t^2 + 4e^{-t}$ désigne la position d'un objet au temps t, quelle sera sa vitesse après 4 secondes?

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = 2t - 4e^{-t} \quad \text{et} \quad v(4) = 2 \cdot 4 - 4e^{-4} = 7{,}9267 \text{ m/s.}$$

Remarque sur les fonctions composées:

On dit qu'on a une **fonction composée** $r(t)$ si on peut trouver au moins 2 fonctions, disons f et g, telles que $r(t) = f\,[\,g(t)]$. Prenons par exemple $r(t) = \sin\left(t^2 + 4\right)$; on a d'abord $g(t) = t^2 + 4$, puis $f(x) = \sin(x)$ donc $f\,[g(t)] = \sin\left(t^2 + 4\right)$. Même une fonction plus simple comme $\sin(4t)$ peut être vue comme une fonction composée: on prend d'abord $4 \cdot t$ ($= g(t)$), puis on prend le sinus du résultat ($= f\,[\,g(t)]$).

On remarque du tableau sur les dérivées que $\frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at)$. On peut se souvenir de ce résultat de la façon suivante: la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, multipliée par la dérivée de l'intérieur de la parenthèse (dans ce cas-ci, on multiplie par la dérivée de $a \cdot t$, qui est a). On peut généraliser ce principe pour évaluer des fonctions plus complexes:

$$\text{si } r(t) = f\,[\,g(t)]\,, \text{ alors } \frac{dr}{dt} = f'\,[\,g(t)] \cdot g'(t).$$

Exemple A.4 a) Soit $r(t) = \sin\left(t^2 + 4\right)$

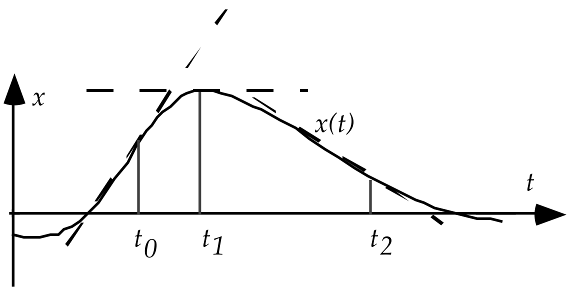
$$\text{Alors } \frac{dr}{dt} = \cos\left(t^2 + 4\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(t^2 + 4\right) = 2t \cdot \cos\left(t^2 + 4\right)$$

b) Soit $x(t) = e^{-t^2}$

$$\text{Alors } \frac{dx}{dt} = e^{-t^2} \cdot \frac{d}{dt}(-t^2) = -2t \cdot e^{-t^2}$$

On constate finalement que la dérivée nous permet d'examiner <u>localement</u> comment une fonction se comporte (ou varie).

En effet, reprenons l'étude du mouvement rectiligne où $x(t)$ = la position d'un objet en fonction du temps:



Pour une valeur de t donnée, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ évaluée à cette valeur de t donne la pente de la droite tangente à la courbe $x(t)$.

On voit sur le graphique 3 exemples: $x'(t_0) = v(t_0)$, $x'(t_1) = v(t_1)$ et $x'(t_2) = v(t_2)$

On remarque que $v(t_0)$ est positif, ce qui signifie que l'objet se déplace dans la direction positive du référentiel. Par contre, $v(t_2)$ est négatif et donc le mouvement se fait dans la direction opposée à celle de la direction positive de notre référentiel. Finalement, on constate qu'en $t = t_1$, la vitesse est nulle et cela représente ici le moment où il y a changement de direction.

L'INTÉGRALE INDÉFINIE

Nous venons de voir qu'à partir d'une fonction position $x(t)$, on peut en déduire la fonction vitesse en se servant de la dérivée.

Prenons le problème inverse: Si je vous donne la fonction vitesse, pouvez-vous me fournir la fonction position? En d'autres mots, pouvons-nous faire l'opération inverse de celle de la dérivée?

La réponse est OUI mais il y a un problème! Même si je connais pour $t \geq 0$ la vitesse à tout instant, cela ne me permet pas de connaître le point de départ du mouvement.

En effet, si par exemple $v(t) = 2t$, alors les fonctions suivantes sont valables pour $x(t)$:

$$x(t) = t^2 \qquad\qquad x(t) = t^2 + 4 \qquad\qquad x(t) = t^2 - 1.$$

Ces 3 fonctions ont comme particularité d'avoir la même dérivée, à savoir $2t$. On n'a pas assez de renseignements pour décider laquelle il faut choisir. Cependant, si on sait que la position initiale est $x(0) = 3$, alors la seule bonne réponse est $x(t) = t^2 + 3$.

La notation utilisée pour désigner l'opération inverse de celle de la dérivée de $v(t)$ est $\int v(t)\,\mathrm{d}t$ où $\int \ldots \mathrm{d}t$ signifie **faire l'intégrale** de la fonction comprise entre le symbole "$\int$" et dt, par rapport à la variable t (c'est le sens qu'on peut donner à dt).

Exemple A.5 a) $x(t) = \int 2t \, \mathrm{d}t = t^2 + C$, où $C \in \mathbb{R}$

b) $x(t) = \int 3t^2 \, \mathrm{d}t = t^3 + C$ car $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^3 + C) = 3t^2$, et on retrouve la fonction à intégrer.

c) $x(t) = \int 2e^{2t} \, \mathrm{d}t = e^{2t} + C$

L'importance de la constante d'intégration est reliée à un problème de conditions initiales. En effet, la dérivée permet de connaître le comportement local d'une fonction. On ne peut cependant pas, à partir du comportement local d'une fonction, retrouver cette fonction à moins de posséder l'information sur une valeur locale de la fonction. (par exemple $x(0)$).

Exemple A.6 Décrire le mouvement d'une particule qui, au temps $t = 0$, est 2m. à droite de l'origine. De plus, sa vitesse est donnée par $v(t) = 2t + 5$.

On a: $v(t) = 2t + 5$, avec $x(0) = 2$.

Alors $x(t) = \int (2t + 5) \, \mathrm{d}t = t^2 + 5t + C$

Comme $x(0) = C = 2$, on obtient $x(t) = t^2 + 5t + 2$.

On utilise aussi les principes suivants au niveau de la notation:

1- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t)$ $\quad \mathrm{d}x = v(t) \, \mathrm{d}t$

$\int \mathrm{d}x = \int v(t) \, \mathrm{d}t \qquad x = \int v(t) \, \mathrm{d}t$

2- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t) \qquad \mathrm{d}v = a(t) \, \mathrm{d}t \qquad v = \int a(t) \, \mathrm{d}t$

c'est-à-dire que la vitesse s'obtient en intégrant l'accélération.

Comme l'intégrale peut se définir comme l'opération inverse de la dérivée, le tableau des règles et propriétés d'intégration suivant peut se déduire facilement du tableau équivalent pour les dérivées. a, b, C et n sont des constantes.

1- $\int [r(t) + s(t)] \, \mathrm{d}t = \int r(t) \, \mathrm{d}t + \int s(t) \, \mathrm{d}t$

2- $\int b \cdot r(t) \, \mathrm{d}t = b \int r(t) \, \mathrm{d}t$, où $b \in \mathbb{R}$

Donc $\int \ldots \, \mathrm{d}t$ est un opérateur linéaire.

3- $\int b \, \mathrm{d}t = bt + C$, où $b, C \in \mathbb{R}$

4- $\int t \, \mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{2} + C$, où $b, C \in \mathbb{R}$

5- $\int t^n \, \mathrm{d}t = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C$, où $n, C \in \mathbb{R}$, avec $n \neq -1$

6- $\int t^{-1} \, \mathrm{d}t = \int \dfrac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \ln|t| + C$, où $C \in \mathbb{R}$

7- $\int e^{at} \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{a} e^{at} + C$ où $a, C \in \mathbb{R}$

8- $\int \sin(at) \, \mathrm{d}t = \dfrac{-1}{a} \cos(at) + C$, où $a, C \in \mathbb{R}$

9- $\int \cos(at) \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{a} \sin(at) + C$, où $a, C \in \mathbb{R}$

10- $\int (at+b)^n \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{a} \dfrac{(at+b)^{n+1}}{n+1} + C$, où $a, b, n, C \in \mathbb{R}$ et si $n \neq -1$. Si $n=-1$, voir la formule 11.

11- $\int (at+b)^{-1} dt = \dfrac{1}{a} \ln|at+b| + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exemples A.7 a) $\int [e^{-4t} + t^3 - 5] \, \mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4} e^{-4t} + \dfrac{t^4}{4} - 5t + C$

b) $\int \sqrt{3t+5} \, \mathrm{d}t = \int (3t+5)^{1/2} \, \mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{3} \frac{(3t+5)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} (3t+5)^{3/2} \frac{2}{3} + C = \frac{4}{9} (3t+5)^{3/2} + C$$

c) $\int [\sin(3t) + 2t^2] \, \mathrm{d}t = \dfrac{-1}{3} \cos(3t) + 2 \dfrac{t^{2+1}}{2+1} + C$

$$= \frac{-1}{3} \cos(3t) + \frac{2}{3} t^3 + C$$

L'INTÉGRALE DÉFINIE

Considérons la fonction vitesse $v(t)$ d'un objet en mouvement. Une notion intéressante à étudier est celle de l'aire comprise entre la courbe de $v(t)$ et l'axe du temps, sur un intervalle disons $[a\,;\,b]$. Cette aire nous donne le déplacement effectué par le corps en mouvement entre le temps $t=a$ et le temps $t=b$.

On note cette aire $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$. C'est l'<u>intégrale définie</u> de $v(t)$, de $t=a$ à $t=b$.

En général, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire "signée" entre la courbe $f(x)$ et l'axe des x. Cette aire est positive pour la partie qui est au-dessus de l'axe des x et négative pour la partie au-dessous de l'axe des x. Ainsi, il pourrait arriver que l'aire ainsi calculée soit égale à 0 même si on voit une aire: il suffit que la partie au-dessus de l'axe des x soit égale à la partie sous l'axe des x pour que leur somme s'annule.

Le résultat suivant est très utile pour calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si $f(t)$ est continue sur $[a\,;\,b]$:

Si F est une intégrale indéfinie de f, c'est-à-dire si $F'(t) = f(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

On note $F(t)\Big|_a^b$ pour indiquer qu'on veut évaluer $F(b) - F(a)$.

Exemples A.8

a) $\int_0^2 2t\,dt = t^2\Big|_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$

b) $\int_{-1}^1 2t\,dt = t^2\Big|_{-1}^1 = 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

c) $\int_0^1 3e^{2t}\,dt = \frac{3}{2}e^{2t}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}e^{2\cdot 1} - \frac{3}{2}e^{2\cdot 0} = \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2} \approx 9{,}584$

d) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin(3t)\,dt = \frac{-1}{3}\cos(3t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{-1}{3}\cos\left(3\,\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3\,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}236$

Si $v(t)$ représente la vitesse d'un objet en mouvement, alors

$\int v(t)\,dt = s(t) + C$ nous donne la position de l'objet (à une constante près).

$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$ nous donne le déplacement de l'objet entre le temps $t=t_1$ et le temps $t=t_2$. C'est la variation de la position. Ce déplacement est positif si la position finale $[s(t_2)]$ est plus loin sur l'axe que la position initiale $[s(t_1)]$.

Exemple A.9 Considérons un objet qui se déplace sur un axe horizontal , avec comme vitesse $v(t) = 5\pi\cos(\pi t)$ m / s et avec position initiale $s(0) = 0$.

Le déplacement total de $t = 0$ à $t = \frac{1}{2}$ est

$$\int_0^{1/2} 5\pi\cos(\pi t)\,dt = 5\sin(\pi t)\Big|_0^{1/2} = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(0) = 5 - 0 = 5$$

Le déplacement total de $t = 1$ à $t = \frac{3}{2}$ est

$$\int_1^{3/2} 5\pi\cos(\pi t)\,dt = 5\sin(\pi t)\Big|_1^{3/2} = 5\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi) = 5(-1) - 5\ 0 = -5$$

C'est dire qu'il a <u>reculé</u> de 5 mètres pendant l'intervalle de $t = 1$ à $t = 1{,}5$.

EXERCICES

1- Dérivez les fonctions suivantes:

***a)** $x(t) = 3$	b) $x(t) = -2$	c) $x(t) = t + 1$
***d)** $x(t) = 3t - 1$	e) $x(t) = t^2 + 4$	f) $x(t) = t^2 + 2t - 3$
***g)** $x(t) = -2t^2 + 3t - 6$	h) $x(t) = t^3 - 9$	i) $x(t) = t^3 - 2t + 4$
j) $x(t) = 2t^3 - t^2 + 3t$	k) $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}\cos(t)$	l) $x(t) = 5 + \sin(t)$

m) $x(t) = \frac{1}{t} - 3\sin(t)$

*****n) $x(t) = \pi\cdot\cos(3t)$

o) $x(t) = 5e^{3t}$

*****p) $x(t) = (4t - 3)^2$

q) $x(t) = 60\cdot\sin(120\pi t)$

r) $x(t) = 3e^{-2t} - (2t + 5)^7$

*s) $x(t) = (2t+3)^2\ \ (3t-1)^3$

t) $x(t) = (3t+5)\sin(2t)$

u) $x(t) = e^{-10t}\cos(5t)$

v) $x(t) = \dfrac{5}{(4t+3)^2}$

*w) $x(t) = \dfrac{5t-7}{(4t+3)^2}$

x) $x(t) = \dfrac{1+\sin(t)}{5t-6}$

2- Donnez la valeur de la dérivée des fonctions suivantes au point donné:

a) $x(t) = \frac{1}{3}(2t^3 - 4)$, à t = 2

b) $x(t) = t^2 - 2t + 1$, à t =1

c) $x(t) = 4\sin(t)$, à $t = \frac{\pi}{2}$

d) $x(t) = 5e^{-t}$, à t = 0

3- Évaluez les intégrales suivantes:

*a) $\int 2\ dt$

*b) $\int t^2 - 2t + 3\ dt$

c) $\int t^{3/2} + 2t + 1\ dt$

d) $\int \sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}\ dt$

e) $\int \sqrt[3]{t^2}\ dt$

f) $\int (4t-3)^2\ dt$

*g) $\int 60\cdot\sin(120\pi t)\ dt$

*h) $\int 3e^{-2t} - (2t+5)^{-7}\ dt$

i) $\int 4e^{2t}\ dt$

j) $\int 3\cos(t)\ dt$

k) $\int t^3 + 2\ dt$

l) $\int 5 - \sin(3t)\ dt$

4- Évaluez les intégrales suivantes :

a) $\int \left(3 - 2e^{-4t}\right) dt$

b) $\int \left(2t^3 + 1\right)^2\ dt$

c) $\int \left(5\cos(2t) + 3t^{7/4}\right) dt$

d) $\int \pi \cos(3t)\, dt$

e) $\int \frac{1}{3t} - \sin t\, dt$

f) $\int \left(4\sin t - 5e^{-t}\right) dt$

g) $\int \left(2t^3 - t^2 + 3t - 1\right) dt$

h) $\int \left(4e^{-3t} + 3\cos(4t) - t^2\right) dt$

i) $\int \frac{t+1}{t}\, dt$

*****j) $\int \frac{5t^2 + 3t - 1}{t-2}\, dt = \int \left(5t + 13 + \frac{25}{t-2}\right) dt$

*****k) $\int_0^1 \left(3 - 2e^{-4t}\right) dt$

l) $\int_0^2 \left(2t^3 + 1\right)^2 dt$

*****m) $\int_1^3 \left(5\cos(2t) + 3t^{7/4}\right) dt$

n) $\int_0^{\pi/12} \pi\cos(3t)\, d$

o) $\int_1^{\pi/4} \left(\frac{1}{3t} - \sin t\right) dt$

p) $\int_0^1 \left(4\sin t - 5e^{-t}\right) dt$

q) $\int_0^3 \left(2t^3 - t^2 + 3t - 1\right) dt$

r) $\int_0^1 \left(4e^{-3t} + 3\cos(4t) - t^2\right) dt$

s) $\int_{-2}^{-1} \frac{t+1}{t}\, dt$

t) $\int_3^4 \frac{5t^2 + 3t - 1}{t-2}\, dt$

RÉPONSES :

1- a) 0 b) 0 c) 1 d) 3

e) $2t$ f) $2t + 2$ g) $-4t + 3$ h) $3t^2$

i) $3t^2 - 2$ j) $6t^2 - 2t + 3$ k) $2t + \frac{1}{2}\sin(t)$ l) $\cos(t)$

m) $\frac{-1}{t^2} - 3\cos(t)$ n) $-3\pi\sin(3t)$ o) $15e^{3t}$ p) $32t - 24$

q) $60 \cdot 120\pi\cos(120\pi t)$ r) $-6e^{-2t} - 14(2t+5)^6$

s) $4(2t+3)(3t-1)^3 + 9(2t+3)^2(3t-1)^2 = (2t+3)(3t-1)^2(30t+23)$

t) $3\sin(2t) + 2(3t + 5)\cos(2t)$

u) $-5e^{-10t}[2\cos(5t) + \sin(5t)]$

v) $\dfrac{-40}{(4t+3)^3}$

w) $\dfrac{5(4t+3)^2 - 8(5t-7)(4t+3)}{(4t+3)^4} = \dfrac{71-20t}{(4t+3)^3}$

x) $\dfrac{(5t-6)\cos t - 5(1+\sin t)}{(5t-6)^2}$

2- a) 8 b) 0 c) 0 d) –5

3- a) $2t + C$

b) $\dfrac{t^3}{3} - t^2 + 3t + C$

c) $\dfrac{2}{5}t^{5/2} + t^2 + t + C$

d) $\dfrac{2}{3}t^{3/2} + 6\sqrt{t} + C$

e) $\dfrac{3}{5}t^{5/3} + C$

f) $\dfrac{1}{12}(4t-3)^3 + C$

g) $\dfrac{-1}{2\pi}\cos(120\pi t) + C$

h) $\dfrac{-3}{2}e^{-2t} + \dfrac{(2t+5)^{-6}}{12} + C$

i) $2e^{2t} + C$

j) $3\sin(t) + C$

k) $\dfrac{t^4}{4} + 2t + C$

l) $5t + \dfrac{1}{3}\cos(3t) + C$

4- a) $3t + \dfrac{1}{2}e^{-4t} + C$

b) $\dfrac{4}{7}t^7 + t^4 + t + C$

c) $\dfrac{5}{2}\sin(2t) + \dfrac{12}{11}t^{11/4} + C$

d) $\dfrac{\pi}{3}\sin(3t) + C$

e) $\dfrac{1}{3}\ln t + \cos t + C$

f) $-4\cos t + 5e^{-t} + C$

g) $\dfrac{1}{2}t^4 - \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 - t + C$

h) $\dfrac{-4}{3}e^{-3t} + \dfrac{3}{4}\sin(4t) - \dfrac{1}{3}t^3 + C$

i) $t + \ln t + C$

j) $\dfrac{5}{2}t^2 + 13t + 25\ln(t-2) + C$

k) 2,5092

l) 91,142857

m) 18,3179

n) 0,74048

o) 0,08628

p) –1,3218

q) 42

r) 0,366

s) 0,30685

t) 47,82868