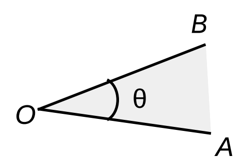
Chapitre 6

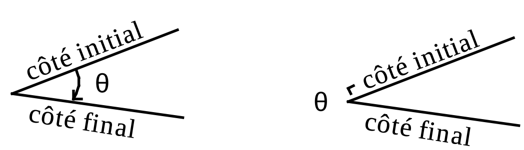
Éléments de trigonométrie

6.1 Les angles et leurs mesures

Un **angle** est la portion de plan comprise entre deux demi-droites de même origine ; l'origine commune est le **sommet** de l'angle et les deux demi-droites sont les **côtés** de l'angle. L'angle représenté à la figure de droite est désigné par <*AOB*, par <*O* ou simplement par θ.

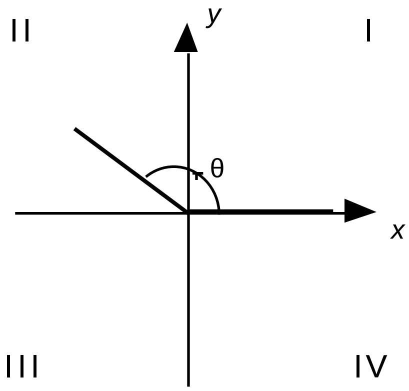


Pour déterminer la mesure d'un angle, il est commode de considérer que la demi-droite *OB* est engendrée par la rotation de la demi-droite *OA* autour du sommet *O*. La mesure d'un angle engendré par une rotation dans le sens anti-horaire est représentée par un nombre positif tandis que la mesure d'un angle engendré par une rotation dans le sens horaire est représentée par un nombre négatif.

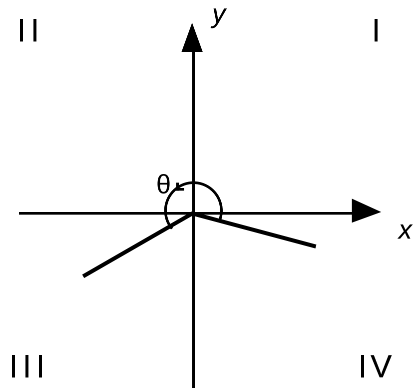


θ est négatif θ est positif

Un angle est dit en **position standard** dans un système de coordonnées rectangulaires si son sommet est situé à l'origine et si son côté initial est le long de l'axe des *x*.



θ est en position standard



θ n'est pas en position standard

La mesure d'un angle peut s'exprimer en **degrés**, en **radians** et en **gradians**. Nous nous intéressons particulièrement aux deux premières unités de mesure.

Un **degré**, noté 1°, représente 1 / 360 ème d'une rotation complète dans le sens anti-horaire. Le degré est divisé en 60 **minutes**. De même, chaque minute est subdivisée en 60 **secondes**. Par exemple, 15 degrés, 17 minutes et 32 secondes est noté 15° 17' 32''. Avec la calculatrice, on obtient habituellement les mesures en décimales. Par contre, pour certaines techniques, on utilise encore les mesures d'angles exprimées sous la forme « degrés, minutes, secondes ».

Exemple Exprimons l'angle 28° 17' 32'' sous la forme décimale. Rappelons d'abord qu'une minute, notée 1', représente la soixantième partie d'un degré et qu'une seconde, notée 1'', représente la soixantième partie d'une minute (donc la 3600ème partie d'un degré). Ainsi,

$$28° \, 17' \, 32'' = 28° + \frac{17}{60} + \frac{32}{3600} = 28{,}292°.$$

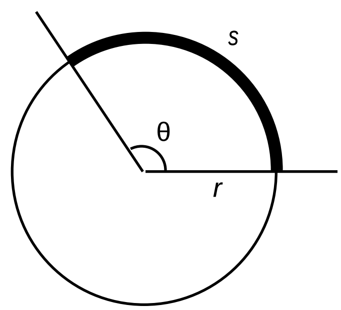
Exemple Pour exprimer l'angle 15,345° sous la forme « degrés, minutes, secondes », on doit d'abord convertir 0,345° en minutes. Puisque une minute est la soixantième partie de un degré, il suffit de multiplier 0,345 par 60 pour obtenir 0,345° · 60 = 20,7'. On a maintenant 20,7' qui s'ajoutent aux 15° précédents et

$$15{,}345° = 15° + 20{,}7' = 15° + 20' + 0{,}7'.$$

De la même façon, on doit convertir 0,7' minute en secondes. Puisque une seconde représente la soixantième partie d'une minute, il suffit de multiplier 0,7 par 60 pour obtenir 0,7' · 60 = 42''. Ainsi 15,345° = 15° 20' 42''.

Notons que certaines calculatrices ont une touche spéciale permettant d'effectuer le passage de la forme « degrés, minutes, secondes » à la forme décimale et vice versa.

En mathématique, l'unité privilégiée pour la mesure d'un angle est le **radian**. Considérons un cercle de rayon r et θ, un angle dont le sommet est situé au centre du cercle. Les côtés de l'angle déterminent, par intersection, un arc de cercle de longueur s.



- La mesure, en radians, de l'angle θ est donnée par le rapport de la longueur d'arc s sur le rayon du cercle r.

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ rad.}$$

- Si le rayon du cercle r et la longueur de l'arc s sont égaux ($s = r$) alors

$$\theta = 1 \text{ rad.}$$

Puisque la circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$, l'arc de cercle soutenant un angle de 360° est de longueur $2\pi r$. Dans ce cas,

$$360° = \frac{2\pi r}{r} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad.}$$

On a donc la relation 2π rad = 360° ou π rad = 180° et, après simplification,

$$\boxed{1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}296°}.$$

On utilise la règle de trois suivante pour effectuer la conversion des degrés en radians ou des radians en degrés,

$$\boxed{\frac{\theta_D}{180°} = \frac{\theta_R}{\pi \text{ rad}}},$$

où θ_D représente la mesure de l'angle θ en degrés et θ_R représente la mesure de l'angle θ en radians.

Exemple Exprimons l'angle 2,5 rad en degrés. Puisque π rad est à 180° ce que 2,5 rad est à θ_D degrés, on a, par la règle de conversion,

$$\frac{\theta_D}{180°} = \frac{2{,}5}{\pi \text{ rad}} \quad \text{d'où } \theta_D = 143{,}24°.$$

Une autre façon d'aborder le problème est d'utiliser le fait que $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$ pour trouver

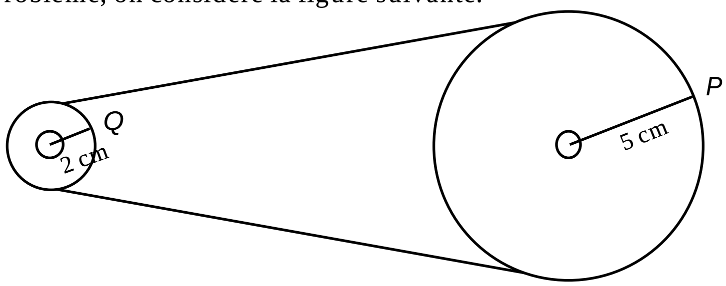
$$2{,}5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi} = 143{,}24°.$$

Exemple Exprimons l'angle 60° en radians. Puisque 180° est à π rad ce que 60° est à θ_R rad, on a, par la règle de conversion,

$$\frac{60°}{180°} = \frac{\theta_R}{\pi \text{ rad}} \quad \text{d'où } \theta_R = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

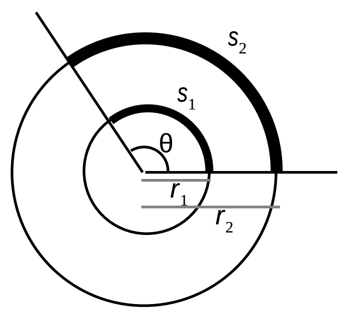
Exemple Une courroie relie une poulie de 2 cm de diamètre à une poulie de 5 cm de diamètre. Si le mouvement de la courroie engendre une rotation de 10 radians de la plus grande poulie, quelle sera la mesure (en radians) de la rotation de la plus petite poulie ?

Pour résoudre ce problème, on considère la figure suivante.



Rappelons que la mesure en radians d'un angle θ est donnée par le rapport de la longueur d'arc s sur le rayon du cercle r, $\theta = \frac{s}{r}$. On peut donc écrire $s = r\,\theta$. Lorsque la grande poulie tourne de 10 radians, le point P aura un déplacement, sur la circonférence de la grande poulie, égal a celui du point Q sur la circonférence de la petite poulie. Le point P se déplacera de $s = r\,\theta = (5)\,(10) = 50$ cm. Pendant ce temps, puisque Q a le même déplacement en longueur d'arc que le point P, la rotation de la plus petite poulie sera de $\theta = \frac{s}{r} = \frac{50}{2} = 25$ rad.

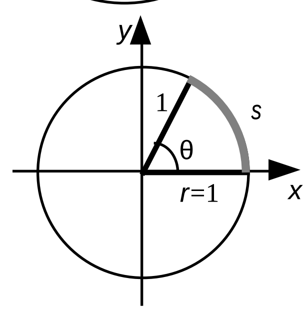
6.2 Le cercle trigonométrique



Puisque la mesure d'un angle est indépendante du rayon du cercle sous-jacent,

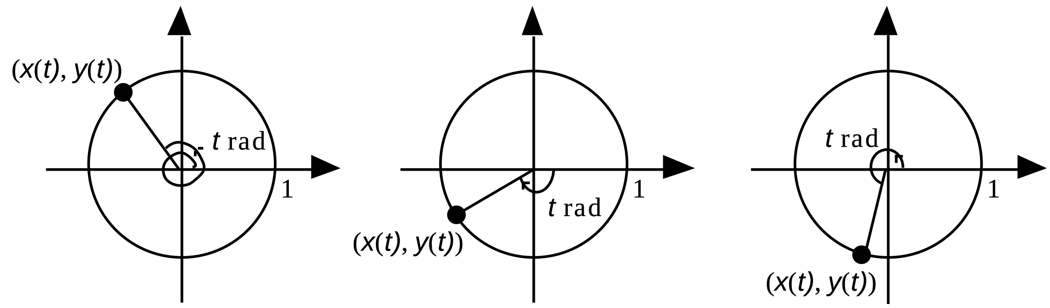
$$\theta = \frac{s_1}{r_1}\text{ rad} = \frac{s_2}{r_2}\text{ rad},$$

il est naturel de s'intéresser au cercle de rayon 1.

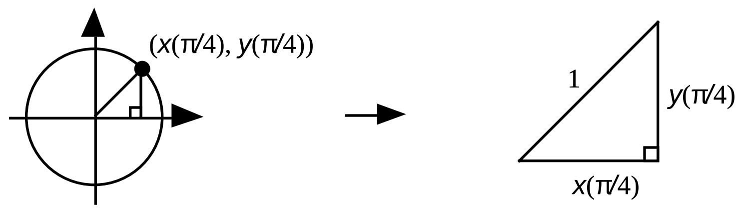


On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré à l'origine du plan cartésien. Ce cercle correspond à l'ensemble solution de l'équation à deux variables $x^2 + y^2 = 1$ et la mesure en radians d'un angle θ correspond exactement à la longueur de l'arc s le soutenant, c'est-à-dire que $\theta = s$ rad.

À un angle $\theta = t$ rad, quel que soit t réel, correspond un unique point sur le cercle trigonométrique. Ce point est de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ où $x(t)$ et $y(t)$ dépendent de t et satisfont la relation pythagoricienne $\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 = 1$.



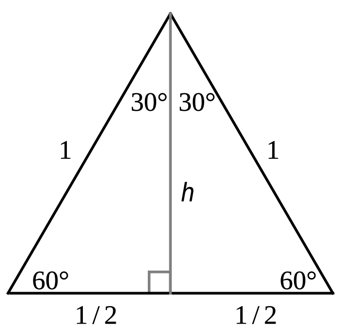
Exemple Trouvons les coordonnées cartésiennes du point sur le cercle trigonométrique associé à l'angle $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad. Situons d'abord l'angle dans le cercle trigonométrique et considérons le triangle de référence de la figure ci-dessous.



En utilisant le théorème de Pythagore, sachant que ce triangle est isocèle, c'est-à-dire que $x(\pi/4) = y(\pi/4)$, on trouve

$$1 = \left(x(\pi/4)\right)^2 + \left(y(\pi/4)\right)^2 = 2\left(x(\pi/4)\right)^2 \qquad \left(x(\pi/4)\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad x(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

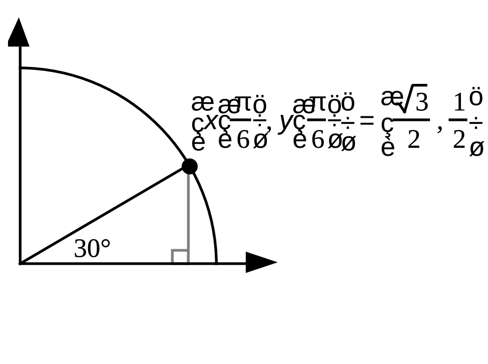
Exemple Pour trouver les coordonnées cartésiennes des points sur le cercle trigonométrique associés aux angles $30° = \frac{\pi}{6}$ rad et $60° = \frac{\pi}{3}$ rad nous considérons le triangle équilatéral suivant.

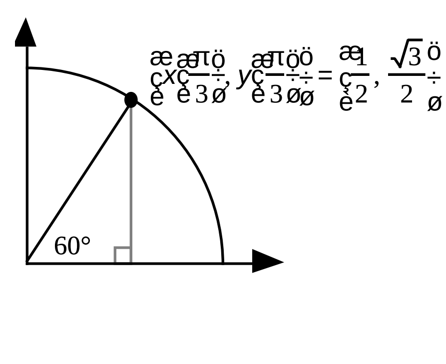


Nous utilisons le théorème de Pythagore pour trouver h.

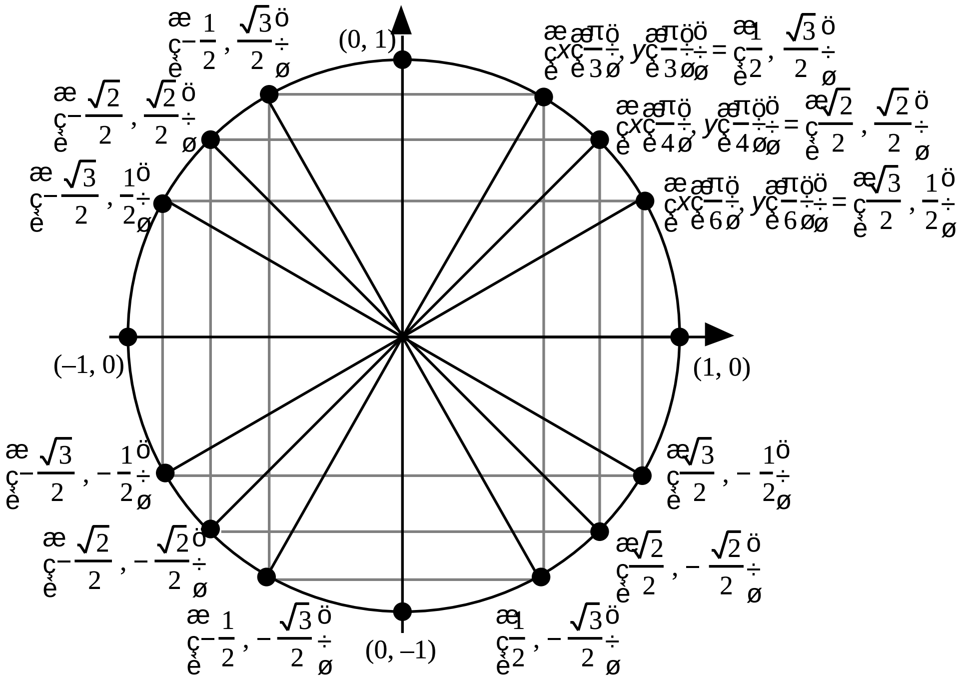
$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On obtient ainsi, les points ci-dessous.





Par des arguments de symétries, on trouve les coordonnées cartésiennes suivantes de points sur le cercle trigonométrique.

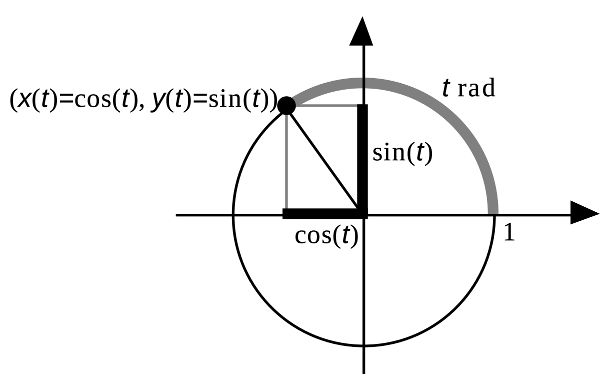


Notons qu'à chaque angle correspond un unique point sur le cercle trigonométrique. Par contre, à chacun des points sur le cercle trigonométrique correspond un nombre infini d'angles différents.

6.3 Les fonctions trigonométriques

Les fonctions définies sur le cercle trigonométrique sont dites **fonctions circulaires** ou **fonctions trigonométriques**. Les deux fonctions trigonométriques cos(t) et sin(t) sont définies comme suit.

Soient t $\mathbb{R}$ et $\left(x(t), y(t)\right)$ un point sur le cercle trigonométrique. Le cosinus de t, noté cos(t) ou bien cos$t$, est l'abscisse du point $\left(x(t), y(t)\right)$ et le sinus de t, noté sin(t) ou bien sin$t$, est l'ordonnée du point $\left(x(t), y(t)\right)$. La figure ci-dessous illustre cette définition.



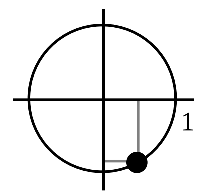
À l'aide du cercle trigonométrique, on constate facilement que le **domaine** des fonctions

$$\boxed{x(t) = \cos(t) \text{ et } y(t) = \sin(t)}$$

est l'ensemble de tous les réels $\mathbb{R}$ et que leur **image** est l'intervalle $[-1, 1]$.

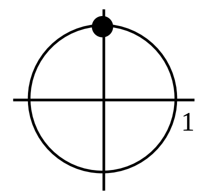
Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos(t) = \cos(t + k2\pi)$ et $\sin(t) = \sin(t + k2\pi)$. Lorsque k est un entier positif, l'angle $k2\pi$ rad correspond à k tours complets dans le sens anti-horaire et lorsque k est un entier négatif, l'angle $k2\pi$ rad correspond à k tours complets dans le sens horaire. Généralement, une fonction $f(t)$ est dite **périodique** s'il existe un nombre réel p tel que, pour tout t du domaine de $f(t)$, on a la propriété $f(t+p) = f(t)$. La plus petite valeur positive p satisfaisant cette équation est appellée la **période** de la fonction f. Les fonctions $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ sont de période 2π.

Exemples Trouvons les valeurs que prennent les fonctions $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ pour certains t particuliers.



a) Puisque l'angle $\frac{5\pi}{3}$ rad correspond au point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur le cercle trigonométrique on a $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

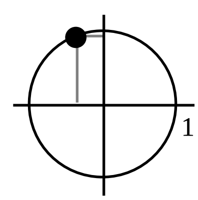
b) Puisque la projection du point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur l'axe des y est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



c) On a $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ puisque l'angle $\frac{5\pi}{2}$ rad correspond au point $(0, 1)$ sur le cercle trigonométrique et sa projection sur l'axe des x est 0.

d) On a $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$ puisque la hauteur du point $(0, 1)$ est 1.

Notons que si on utilise une calculatrice pour évaluer $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ on obtient une réponse de l'ordre de $-1{,}025 \times 10^{-9}$. Quoique proche de 0, ce n'est tout de même pas la bonne réponse. Ceci est dû en partie à l'arrondissement du nombre irrationnel $\frac{5\pi}{2}$ avant l'évaluation de son cosinus.



e) À l'aide de la calculatrice, on trouve les valeurs approximatives cos(2) et sin(2) : $\cos(2) \approx -0,4143$ et $\sin(2) \approx 0{,}9093$. Celles-ci sont plausibles car elles correspondent aux projections sur les axes du point sur le cercle trigonométrique associé à l'angle 2 rad ≈ 115°.

Remarque Lorsqu'on évalue une fonction trigonométrique en un angle, la mesure de cet angle est en radians à moins qu'il n'en soit spécifié autrement. Par exemple, cos(45) désigne le cosinus de 45 radians (45 rad ≈ 2578,31°) ce qui est très différent de cos(45°).

À partir des fonctions cos(t) et sin(t), on définit les fonctions trigonométriques de **tagente** tg(t), de **cotangente** cotg(t), de **sécante** sec(t) et de **cosécante** cosec(t) par les quotients suivants.

$$\boxed{\operatorname{tg}(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)},\ \operatorname{cotg}(t)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)},\ \sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}\ \text{ et }\ \operatorname{cosec}(t)=\frac{1}{\sin(t)}.}$$

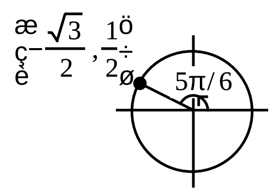
Exemples Évaluons les six fonctions trigonométriques en

a) $t=\frac{5\pi}{6}$ b) $t=-\frac{3\pi}{2}$ et en c) $t=\frac{15\pi}{4}$.

a) On sait que $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. Ainsi, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

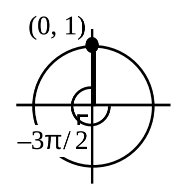
$$\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$



b) On sait que $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$ et que $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1$. On trouve ainsi,

$\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{0}$ n'est pas définie $\qquad \operatorname{cotg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{0}{1}=0$

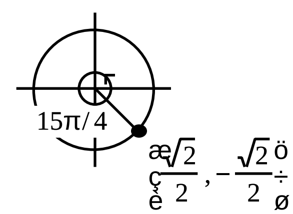
$\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{0}$ n'est pas définie $\qquad \operatorname{cosec}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{0}{1}=0.$



c) On sait que $\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1 \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

$$\sec\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2} \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}.$$



À l'aide du cercle trigonométrique on peut facilement complèter le tableau suivant.

Valeurs associées aux angles spéciaux

t	sin t	cos t	tg t
$0^\circ = 0$ rad	0	1	0
$30^\circ = \pi/6$ rad	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45^\circ = \pi/4$ rad	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60^\circ = \pi/3$ rad	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90^\circ = \pi/2$ rad	1	0	Non définie

Celui-ci ne contient que les valeurs associées aux angles spéciaux pour les fonctions sin$t$, cos$t$ et tg$t$ car les valeurs des trois autres fonctions trigonométriques évaluées en ces angles sont obtenues en utilisant les relations

$$\boxed{\operatorname{cotg}(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}(t)},\ \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \ \text{ et } \operatorname{cosec}(t) = \frac{1}{\sin(t)}.}$$

On remarque, de plus, que les calculatrices n'ont que les touches associées aux fonctions cos(t), sin(t) et tg(t). On doit donc utiliser les relations ci-dessus pour trouver les trois autres fonctions trigonométriques évaluées en un angle t lorsque les coordonnées cartésiennes du point associé à t sur le cercle trigonométrique ne sont pas « évidentes ».

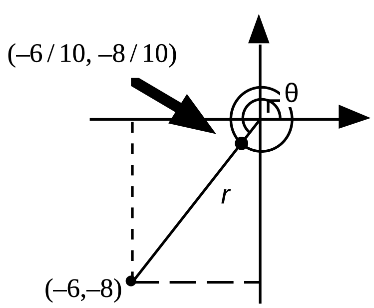
Exemples À l'aide d'une calculatrice, évaluons a) cotg(2) b) sec(12) c) cosec(–2,5). Rappelons que ces angles sont implicitement en radians, on doit donc mettre la calculatrice en mode radian.

a) $\operatorname{cotg}(2) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(2)} \approx \dfrac{1}{-2{,}185} \approx 0{,}4577$

b) $\sec(12) = \dfrac{1}{\cos(12)} \approx \dfrac{1}{0{,}8439} \approx 1{,}185$

c) $\operatorname{cosec}(-2{,}5) = \dfrac{1}{\sin(-2{,}5)} \approx \dfrac{1}{-0{,}5985} \approx -1{,}671$

Exemple Trouvons la valeur des six fonctions trigonométriques évaluées en θ, où θ est un angle dont le côté terminal passe par le point (–6,–8).



Par le théorème de Pythagore, on a

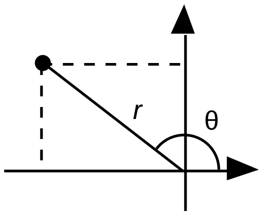
$$r = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Le point (–6, –8) n'est donc pas un point du cercle trigonométrique. Par contre, en divisant par 10 chacune de ses coordonnées, on trouve le point $\left(-\dfrac{6}{10}, -\dfrac{8}{10}\right)$ qui est sur le cercle trigonométrique. Ainsi,

$$\sin\theta = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = -\frac{5}{3} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{3}{4}.$$

Exemple Sachant que tg θ = – 3/4 et que le côté final de l'angle θ se situe dans le deuxième quadrant, déterminons la valeur des cinq autres fonctions trigonométriques. Notons que l'on n'a pas à trouver explicitement θ. Considérons d'abord la figure suivante.

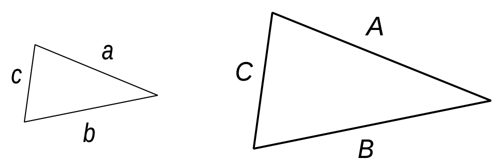


La tangente est obtenue du rapport entre le sinus et le cosinus. Puisque le côté final de l'angle est dans le deuxième quadrant, on en déduit que le sinus est positif tandis que le cosinus est négatif. On peut donc, entre autre, utiliser (–4,3) comme coordonnées d'un point sur le côté final de l'angle θ.

Par le théorème de Pythagore, on a $r = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Notre point de référence sur le cercle trigonométrique est donc $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. On obtient alors

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = -\frac{4}{5} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3} \qquad \sec\theta = -\frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\theta = -\frac{4}{3}.$$

Théorème d'Euclide Deux triangles semblables ont des côtés correspondants proportionnels.



Les triangles illustrés à la figure de gauche sont **semblables**. Ceci signifie, par le théorème d'Euclide, que

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

La figure suivante donne une interprétation géométrique des fonctions trigonométriques évaluées en un angle θ dans le cas où θ est un angle aigu. Basé sur le triangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 on peut déduire, à l'aide de la notion de triangles semblables et du théorème d'Euclide, toutes les longueurs des segments associées aux fonctions trigonométriques.

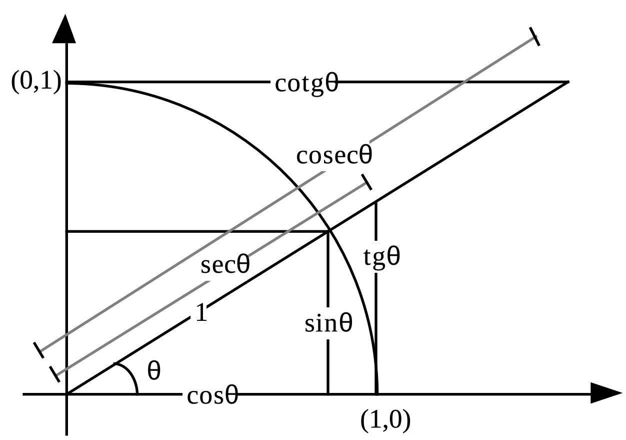
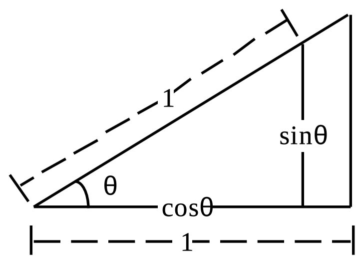


figure 6.A

En effet, considérons les triangles semblables ci-dessous.



En utilisant le théorème d'Euclide, on trouve l'égalité suivante

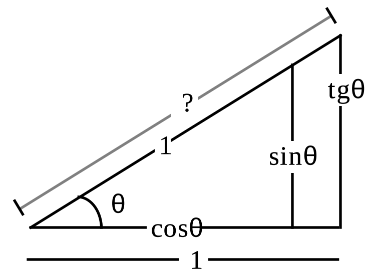
$$\frac{\sin\theta}{?} = \frac{\cos\theta}{1}.$$

En isolant ?, on trouve

$$? = \operatorname{tg}\theta.$$

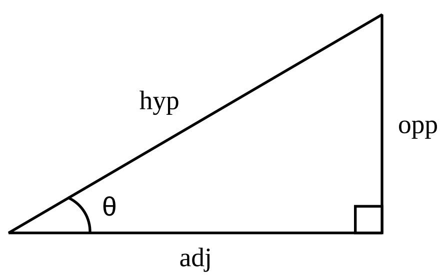
De même, en considérant les triangles semblables ci-contre, on détermine que

$$\frac{1}{?} = \frac{\cos\theta}{1} \qquad ? = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$



De la même façon, on peut compléter les calculs pour obtenir les interprétations de toutes les fonctions trigonométriques illustrées à la figure 6.A.

Rappelons que dans le cas d'un angle aigu, les fonctions trigonométriques correspondent aux rapports suivants. Soit θ un angle aigu, c'est-à-dire $0° < \theta < 90°$ ou bien $0 < \theta < \pi/2$ rad.



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

6.4 Les graphes des fonctions circulaires

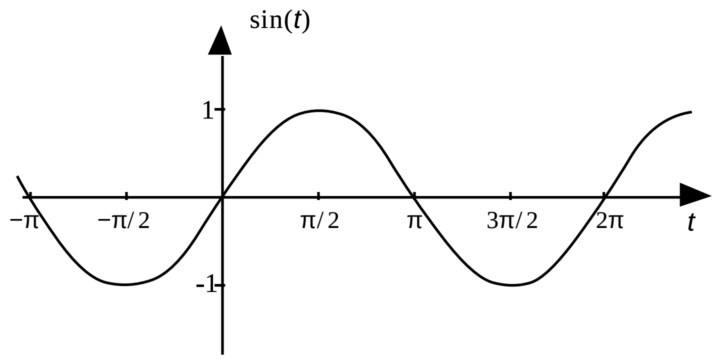
À l'aide du cercle trigonométrique, on peut facilement tracer les graphes des fonctions trigonométriques de base. En fait, il suffit de construire le graphe d'une fonction périodique sur une seule période et reprendre cette période à l'infini.

<u>Le graphe de $y(t) = \sin(t)$</u>

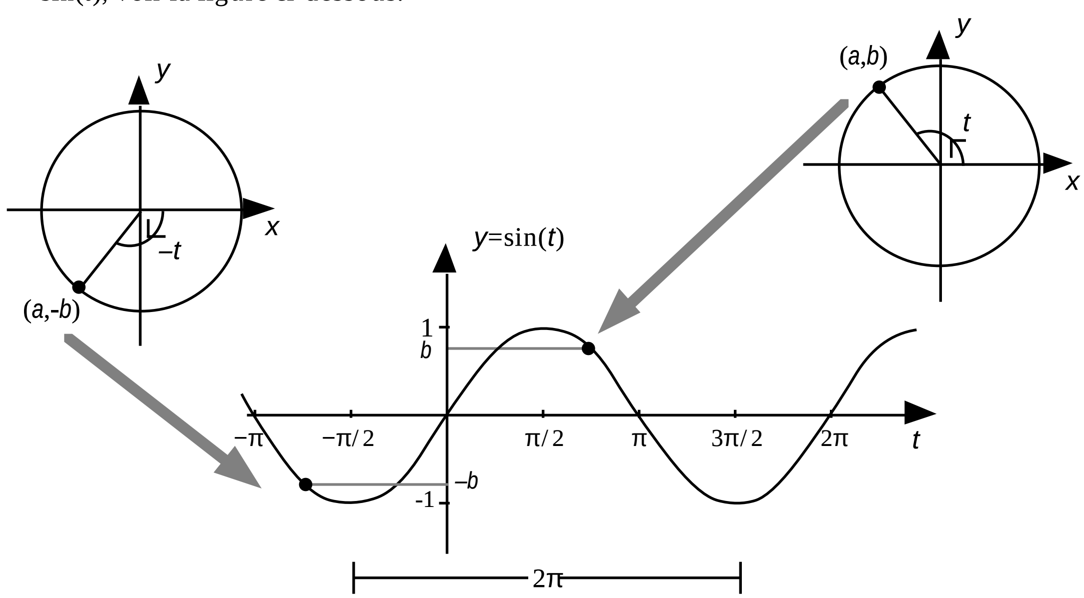
Période : 2π

Domaine : ℝ

Image : $[-1, 1]$



L'intersection du graphe de la fonction $\sin(t)$ avec l'axe vertical est le point $(0, 0)$ car $\sin(0) = 0$. Les intersections avec l'axe horizontal sont en $t = k\pi$ où k parcourt les entiers, k ℤ. Le sinus est maximal (il vaut 1) en $t = \pi/2 + k2\pi$ et minimal (il vaut –1) en $t = -\pi/2 + k2\pi$, ceci quel que soit l'entier k. De plus, le graphe de la fonction $\sin(t)$ est symétrique par rapport à l'origine. En effet, on vérifie facilement sur le cercle trigonométrique que $\sin(t)$ est une fonction impaire puisque, quel que soit t ℝ, on a $\sin(-t) = -\sin(t)$; voir la figure ci-dessous.



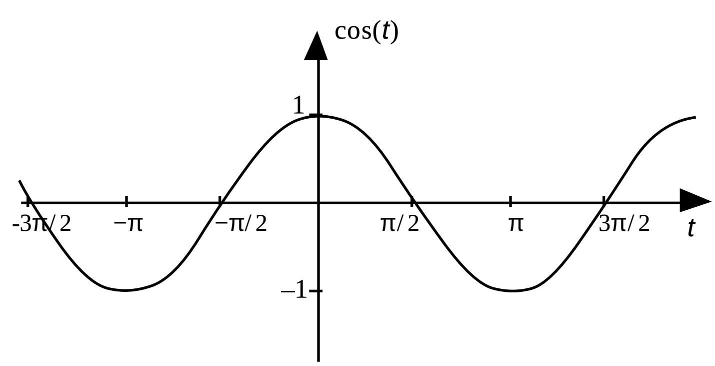
De même, on peut tracer le graphe de la fonction $\cos(t)$.

<u>Le graphe de $x(t) = \cos(t)$</u>

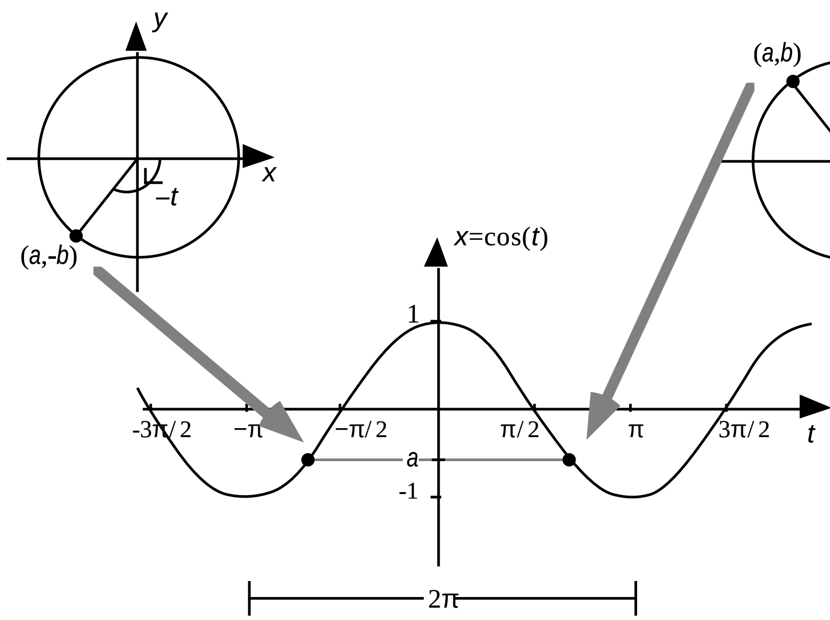
Période : 2π

Domaine : ℝ

Image : $[-1, 1]$

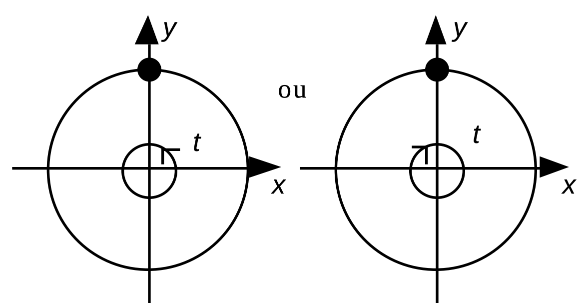


L'intersection du graphe de la fonction cos(t) avec l'axe vertical est le point (0, 1) car cos(0) = 1. Les intersections avec l'axe horizontal sont en $t = \pi/2 + k\pi$ où k parcourt les entiers, k $\mathbb{Z}$. Le cosinus est maximal (il vaut 1) en $t = k2\pi$ et minimal (il vaut –1) en $t = \pi + k2\pi$, ceci quel que soit l'entier k. De plus, le graphe de la fonction cos(t) est symétrique par rapport à l'axe vertical car cos(t) est une fonction paire; en effet, quel que soit t $\mathbb{R}$, on a cos(t) = cos(–t); voir la figure ci-dessous.

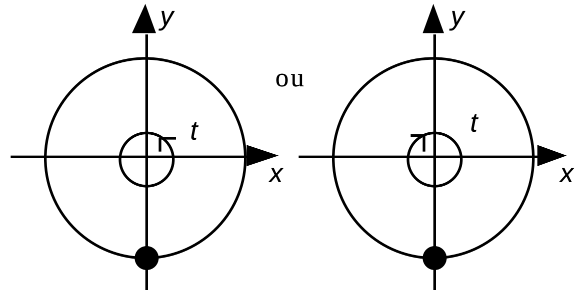


Puisque la fonction tg(t) est définie par le quotient $\mathrm{tg}(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$, utilisons les fonctions sin(t) et cos(t) pour tracer son graphe. On a tg(t) = 0 si et seulement si sin(t) = 0, c'est-à-dire lorsque $t = k\pi$ où k $\mathbb{Z}$. De plus, la fonction de tg(t) n'est pas définie lorsque cos(t) = 0, c'est-à-dire lorsque $t = \pi/2 + k\pi$ où k $\mathbb{Z}$. Étudions le comportement de la fonction tangente lorsque t approche $\pi/2 + k\pi$ où k $\mathbb{Z}$. Il y a essentiellement deux cas à distinguer ici, soit que le point correspondant à t sur le cercle trigonométrique est en (0, 1) ou bien en (0, –1).

- Lorsque t approche de $\pi/2 + k\pi$ où k est un entier pair fixé, sin(t) approche de +1 tandis que cos(t) approche de 0. Ainsi, plus t approche de $\pi/2 + k\pi$ (où k est pair) plus $\mathrm{tg}(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ tend vers $+\infty$.



- Lorsque t approche de $-\pi/2 + k\pi$ où k est un entier impair fixé, $\sin(t)$ approche de -1 tandis que $\cos(t)$ approche de 0. Ainsi, plus t approche de $-\pi/2 + k\pi$ (où k est impair) plus $\mathrm{tg}(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ tend vers $-\infty$.



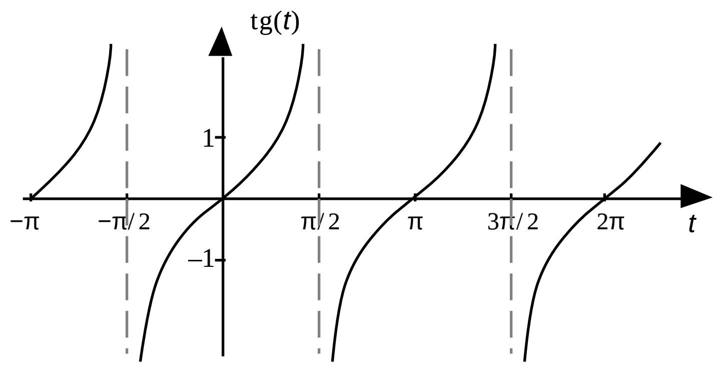
On obtient donc le graphe suivant pour la fonction tangente.

Le graphe de tg(t)

Période : π

Domaine : $\mathbb{R} / \{\pi/2 + k\pi \mid k \ \mathbb{Z}\}$

Image : $\mathbb{R}$



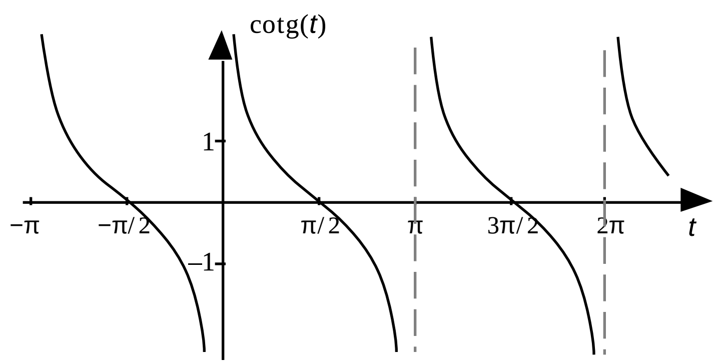
Une étude semblable nous mène au graphe suivant pour la cotangente.

Le graphe de cotg(t)

Période : π

Domaine : $\mathbb{R} / \{k\pi \mid k \ \mathbb{Z}\}$

Image : $\mathbb{R}$



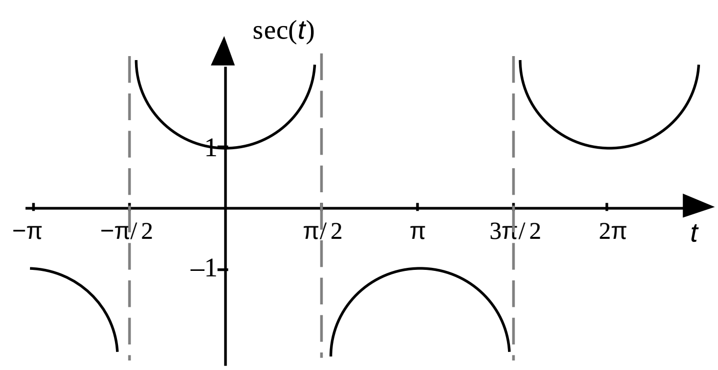
La fonction $\sec(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$ est définie seulement pour les réels t tels que $\cos(t) \neq 0$.

Le graphe de sec(t)

Période : 2π

Domaine : $\mathbb{R} / \{\pi/2 + k\pi \mid k \ \mathbb{Z}\}$

Image : $\mathbb{R} / [-1, 1]$



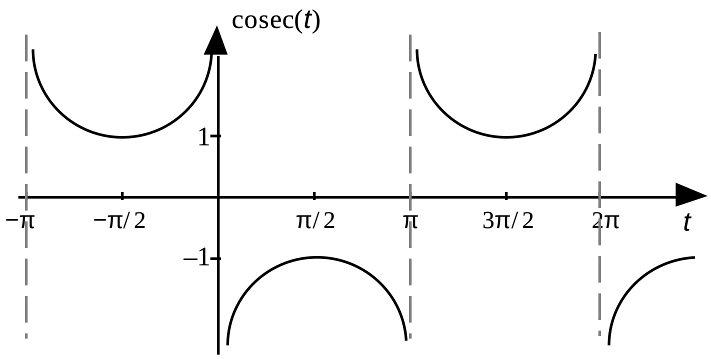
La fonction $\operatorname{cosec}(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$ est définie seulement pour les réels t tels que $\sin(t) \neq 0$.

<u>Le graphe de cosec(t)</u>

Période : 2π

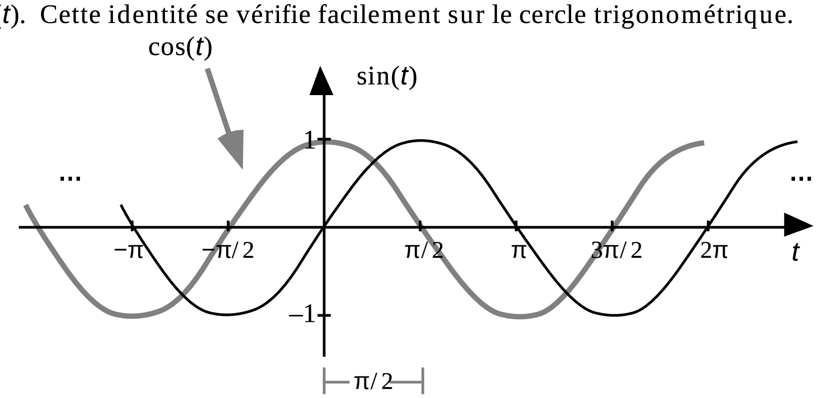
Domaine : $\mathbb{R} / \{k\pi \mid k \ \ \mathbb{Z}\}$

Image : $\mathbb{R} / [-1, 1]$



Tout comme les autres fonctions, il est possible d'additionner, de soustraire, de multiplier et / ou de diviser des fonctions trigonométriques entre elles. On peut aussi les combiner avec des fonctions algébriques. Nous nous intéressons surtout aux fonctions du type $f(t) = A\sin(Bt + C) + k$ ou bien $f(t) = A\cos(Bt + C) + k$ où A, B, C et k sont des constantes réelles quelconques. On reconnaît, à la suite du chapitre 4, que les graphes de telles fonctions sont obtenues des graphes de sin(t) et de cos(t) par des translations, des dilatations et / ou des contractions.

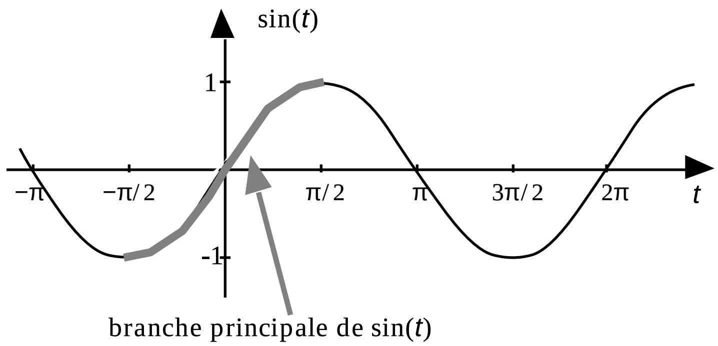
Remarquons, par exemple, que le graphe de la fonction sin(t) est obtenue par une translation horizontale de $\pi/2$ unités vers la droite du graphe de la fonction cos(t). Ceci vient du fait que $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$. Cette identité se vérifie facilement sur le cercle trigonométrique.



6.5 Les fonctions trigonométriques réciproques

On a vu qu'une fonction possède une fonction réciproque seulement si elle est injective (tout élément de l'image est l'image d'un unique élément du domaine). Puisque les fonctions trigonométriques sont périodiques, pour définir les fonctions réciproques associées, on doit restreindre les domaines.

Pour définir la fonction réciproque de la fonction sin(t) on restreint son domaine à l'intervalle [–π/2, π/2] et on appelle la fonction sin(t) restreinte à cet intervalle la **branche principale** de sin(t). La fonction sinus ainsi restreinte est de domaine [–π/2, π/2] et d'image [–1, 1].

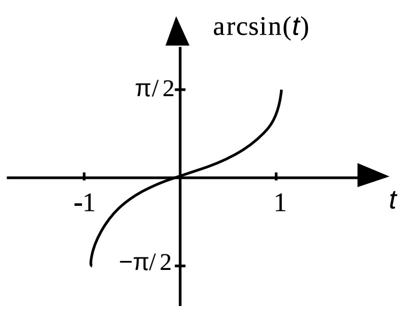


Puisque la branche principale de sin(t) est injective, on définit la fonction réciproque, notée $\sin^{-1} t$ ou bien arcsin$t$ comme suit

$$\text{pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \boxed{T = \sin(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin(T)}\ .$$

Autrement dit, t = arcsin(T) est l'angle dans l'intervalle [–π/2, π/2] dont le sinus est T.

La fonction arcsin(t) a comme domaine l'intervalle [–1, 1] et comme image, l'intervalle [–π/2, π/2]. Pour obtenir le graphe de arcsin(t), il suffit d'effectuer la reflexion de la branche principale de sin(t) selon l'axe à 45°.



Domaine : [–1, 1]

Image : [–π/2, π/2]

arcsin(sin(t)) = t lorsque $t \in$ [–π/2, π/2]

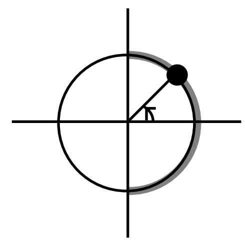
sin(arcsin(t)) = t lorsque $t \in$ [–1, 1]

On ne doit pas confondre la notion d'inverse sous la multiplication et celle de fonction réciproque. Par exemple, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ signifie que le sinus de $\pi/3$ est $\sqrt{3}/2$. On sait trouver $\sin(\pi/3) = \sin(30°)$ à l'aide de la calculatrice. Par contre, si on veut trouver un angle dont le sinus est $\sqrt{3}/2$ on devra utiliser la fonction $\arcsin(t)$. Ainsi, l'angle dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est $\sqrt{3}/2$ est $\theta = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$ rad $= 30°$. Cette fonction est souvent désignée (surtout par les auteurs américains) par $\sin^{-1}$ et elle se trouve sur la plupart des calculatrices.

Exemples Trouvons a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et b) $\arcsin(-1)$.

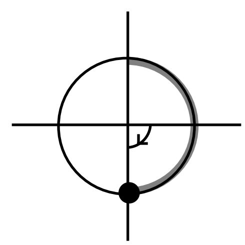
a) $\arcsin\left(\sqrt{2}/2\right)$ est l'angle dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est $\sqrt{2}/2$. A l'aide du cercle trigonométrique, on trouve

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$



b) $\arcsin(-1)$ est l'angle dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est -1. A l'aide du cercle trigonométrique, on trouve

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

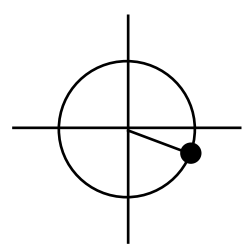


Notons, par exemple, que même si $\sin(3\pi/2) = -1$, $3\pi/2$ n'est pas dans l'image de la fonction $\arcsin(t)$ et $\arcsin(-1) \neq 3\pi/2$.

Exemples Trouvons a) $\sin(\arcsin(-0{,}4))$ et b) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$.

a) Puisque $\arcsin(-0{,}4)$ est l'angle dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est $-0{,}4$ on a

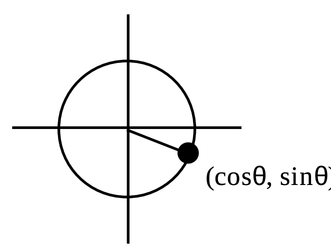
$$\sin(\arcsin(-0{,}4)) = -0{,}4.$$



Rappelons qu'en général, lorsque $t \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(t)) = t$.

b) Plaçons l'angle $\theta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ sur le cercle trigonométrique. Comme son sinus est $-0{,}4472 \approx -1/\sqrt{5}$, son côté final est nécessairement dans le quatrième quadrant. Pour trouver la tangente de cet angle, il ne suffit maintenant que de déterminer son cosinus et calculer $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Par la règle de Pythagore, on sait que

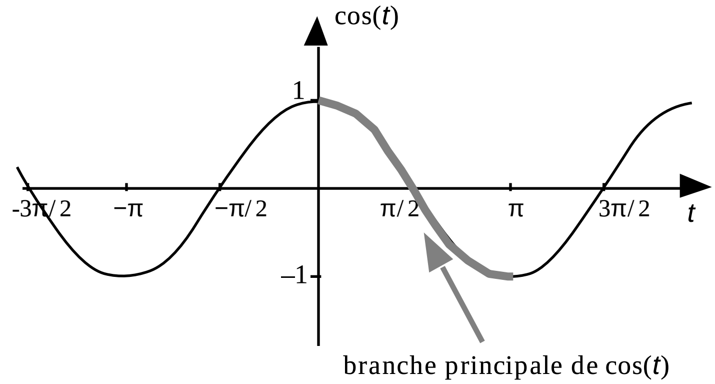
$$1 = \cos^2\theta + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2.$$



Ainsi, puisque le côté final est dans le quatrième quadrant, $\cos\theta = +\frac{2}{\sqrt{5}}$ et

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}.$$

Pour définir la fonction réciproque de la fonction cos(*t*) on restreint son domaine à l'intervalle [0, π] et on appelle la fonction cos(*t*) restreinte à cet intervalle la **branche principale** de cos(*t*). La fonction cosinus ainsi restreinte est de domaine [0, π] et d'image [–1, 1].

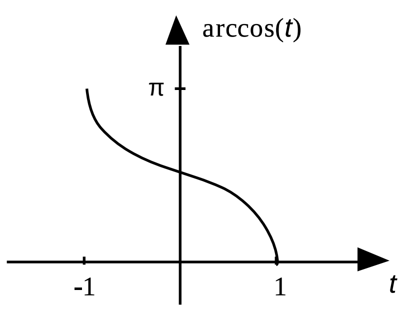


Puisque la branche principale de cos(*t*) est injective, on définit la fonction réciproque, notée $\cos^{-1} t$ ou bien arccos*t* comme suit

pour t $[0, \pi]$, $\boxed{T = \cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arccos(T)}$.

Autrement dit, *t* = arcscos(*T*) est l'angle dans l'intervalle [0, π] dont le cosinus est *T*.

La fonction arccos(*t*) a comme domaine l'intervalle [–1, 1] et comme image, l'intervalle [0, π]. Pour obtenir le graphe de arccos(t), il suffit d'effectuer la reflexion de la branche principale de cos(*t*) selon l'axe à 45°.



Domaine : [–1, 1]

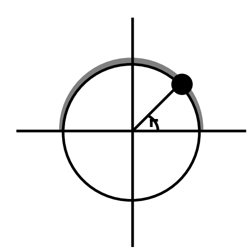
Image : [0, π]

arccos(cos(*t*)) = *t*   lorsque *t*   [0, π]

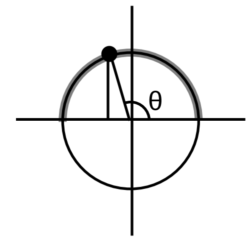
cos(arccos(*t*)) = *t*   lorsque *t*   [–1, 1]

Exemples Trouvons a) arccos($\sqrt{2}/2$)   et   b) cotg(arccos(–1/$\sqrt{5}$)).

a) Puisque arccos($\sqrt{2}/2$) est un angle dont le cosinus est $\sqrt{2}/2$ et que l'image de la fonction arccos*t* est [0,π], on a arccos($\sqrt{2}/2$) = π/4.



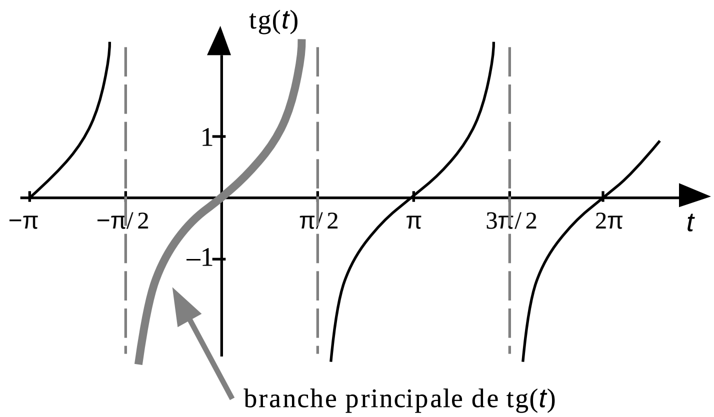
b) Plaçons l'angle $\theta = \arccos(-1/\sqrt{5})$ dans le cercle trigonométrique et utilisons le théorème de Pythagore pour trouver $\sin\theta$. On sait que $\cos\theta = -1/\sqrt{5}$ et que le coté final de l'angle est nécessairement dans le deuxième quadrant. On a donc



$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(1/\sqrt{5}\right)^2} = 2/\sqrt{5}$$

et $\operatorname{cotg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}$.

Pour définir la fonction réciproquede la fonction tg(t) on restreint son domaine à l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$ et on appelle la fonction tg(t) restreinte à cet intervalle la **branche principale** de tg(t). La fonction tangente ainsi restreinte est de domaine $]-\pi/2, \pi/2[$ et d'image $\mathbb{R}$.

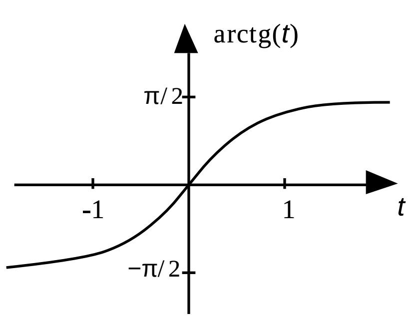


Puisque la branche principale de tg(t) est injective, on définit la fonction réciproque, notée $\operatorname{tg}^{-1}t$ ou bien arctg$t$ comme suit

$$\text{pour } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \boxed{T = \operatorname{tg}(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \operatorname{arctg}(T)}\ .$$

Autrement dit, $t = \operatorname{arctg}(T)$ est l'angle dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ dont la tangente est T.

La fonction arctg(t) a comme domaine l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et comme image, l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Pour obtenir le graphe de arctg(t), il suffit d'effectuer la reflexion de la branche principale de tg(t) selon l'axe à 45°.



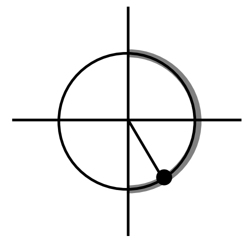
Domaine : $\mathbb{R}$

Image : $]-\pi/2, \pi/2[$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t)) = t$ lorsque $t \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(t)) = t$ lorsque $t \in \mathbb{R}$

Exemple Trouvons $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ à l'aide du cercle trigonométrique. On cherche l'angle $\theta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$, dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, dont la tangente est $-\sqrt{3}$.
Puisque $\theta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ est dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ (l'image de la fonction arctg(t)) et que sa tangente est négative, le côté final de l'angle θ doit être dans le quadrant IV. Or, on sait que



$$\theta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) \qquad \text{tg}(\theta) = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta = -\sqrt{3}\cos\theta$$

et on en déduit que

$$\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Exemple Trouvons arctg(–0,2) à l'aide de la calculatrice. Sur la majorité des calculatrices, la fonction arctg(t) est désignée par $\boxed{\tan^{-1}}$. On peut mettre la calculatrice en mode degré ou en mode radian. Selon le mode, la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ donnera l'angle en degrés ou en radians.

$$\text{arctg}(-0{,}2) = -0{,}1974 \text{ rad} = -11{,}3099°.$$

Identités En général, les calculatrices n'ont que les touches associées aux fonctions réciproques de sin(t), désignée par $\boxed{\sin^{-1}}$, cos(t), désignée par $\boxed{\cos^{-1}}$, et tg(t), désignée par $\boxed{\tan^{-1}}$. Les identités suivantes sont utiles puisqu'on peut construire les fonctions arccotg(t), arcsec(t) et arccosec(t) en nous servant des fonction arctg(t), arccos(t) et arcsin(t).

$$\text{arccotg } t = \text{arctg}(1/t), \qquad \text{arcsec } t = \text{arccos}(1/t) \quad \text{et} \quad \text{arccosec}(t) = \arcsin(1/t)$$

En effet, pour $-\pi/2 \le x \le \pi/2, x \ne 0$, on a :

$$\text{arccotg}\, y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \text{cotg}\, x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\, x = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}\left(1/y\right)$$

Ainsi, $\text{arccotg}(t) = \text{arctg}(1/t)$. De même, pour $0 \le x \le \pi, x \ne \pi/2$, on a :

$$\text{arcsec}\, y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \sec x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos\left(1/y\right)$$

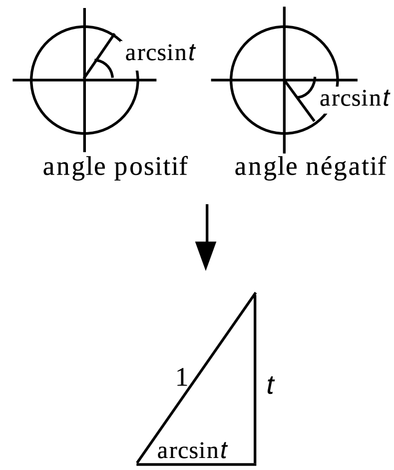
Ainsi, $\text{arcsec}(t) = \arccos(1/t)$. Finalement, pour $-\pi/2 \le x \le \pi/2, x \ne 0$, on a :

$$\text{arccosec}\, y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \text{cosec}\, x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\sin x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin\left(1/y\right)$$

Ainsi, $\text{arccosec}\, y = \arcsin(1/y)$.

Exemples Certaines combinaisons de fonctions trigonométriques et de fonctions trigonométriques réciproques donnent lieu à des expressions algébriques. Trouvons des expressions algébriques pour a) cos(arcsin *t*) et b) cos(arctg *t*).

a) arcsin*t* est l'angle dans l'intervalle $[\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est *t*. Que arcsin*t* soit positif ou négatif, le triangle de référence est le même. Sachant que $\theta = \arcsin t$ si et seulement si $\sin\theta = t$, θ $[-\pi/2, \pi/2]$, on peut utiliser le triangle illustré à droite pour «jouer» avec nos fonctions trigonométriques. On trouve alors, à l'aide du théorème de Pythagore, que



$$\cos(\arcsin t) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1} = \sqrt{1-t^2}.$$

Notons que nous pouvons facilement trouver tg(arcsin*t*), cotg(arcsin*t*), sec(arcsin*t*) et cosec(arcsin*t*) à l'aide du même triangle. En effet,

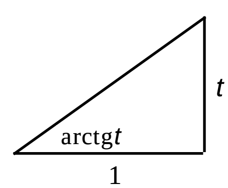
$$\operatorname{tg}(\arcsin t) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\operatorname{cotg}(\arcsin t) = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t},$$

$$\sec(\arcsin t) = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\operatorname{cosec}(\arcsin t) = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{t}.$$

b) Par un argument semblable à celui de a), on peut utiliser le triangle illustré à droite pour trouver cos(arctg*t*). Par le théorème de Pythagore, l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{1+t^2}$ On a donc

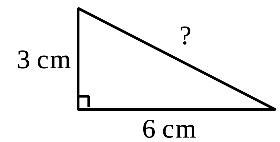


$$\cos(\operatorname{arctg} t) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

6.6 Résolution de triangles, loi des sinus et loi des cosinus

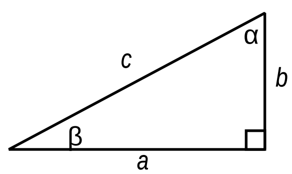
Un **triangle rectangle** (ou **droit**) est un triangle qui a un angle de 90˚. Lorsque l'on connait la longueur de deux de ses côtés ou bien la mesure de l'un de ses angles et la longueur de l'un de ses côtés, celui-ci est tout-à-fait déterminé. **Résoudre** un triangle droit signifie qu'on détermine les mesures de tous ses angles et les longueurs de tous ses côtés.

Par exemple, le théorème de Pythagore nous permet de trouver la longueur de l'hypoténuse du triangle illustré à la figure de droite. En effet, on a $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7082$. Les longueurs de deux côtés déterminent donc, exactement, la longueur du troisième côté.



Pour trouver la mesure de ses angles, on utilise donc les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques.

Exemple (côté + angle) Résolvons le triangle suivant où c = 27,3 cm et α = 47,8°.



D'une part, on sait que la somme des angles d'un triangle est toujours 180°. Ainsi, $90° + \alpha + \beta = 180°$ et, puisque $\alpha = 47{,}8°$, on a $\beta = 180° - 90° - 47{,}8° = 42{,}2°$. D'autre part, on a

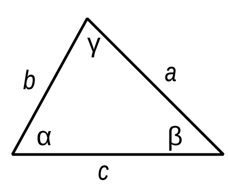
$$\sin \beta = \sin 42{,}2 = \frac{b}{27{,}3} \text{ d'où } b = 27{,}3 \sin 42{,}2 \approx 18{,}338 \text{ cm.}$$

Finalement, par le théorème de Pythagore, on a

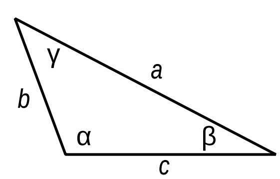
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{27{,}3^2 - 18{,}338^2} \approx 20{,}2239 \text{ cm.}$$

Exemple (côté + côté) Utilisons comme référence le triangle de l'exemple précédent et résolvons le dans le cas où a = 1,38 cm et b = 6,73 cm. Le théorème de Pythagore permet de trouver $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}38^2 + 6{,}73^2} = 6{,}87$. De plus, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{6{,}73}{1{,}38} \approx 4{,}8768$ d'où $\beta \approx \operatorname{tg}^{-1} 4{,}8768 = 78{,}41°$. Il ne nous reste qu'à trouver α. Puisque $90° + \alpha + \beta = 180°$, on a $\alpha = 90° - \beta \approx 11{,}59°$.

Un **triangle oblique** est un triangle sans angle droit. Un triangle oblique est dit **aigu** si tous ses angles sont compris entre 0˚ et 90˚ et il est dit **obtus** si un de ses angles est entre 90˚ et 180˚. Les figures suivantes indiquent les conventions utilisées pour identifier les côtés et les angles des triangles.



Triangle aigu



Triangle obtus

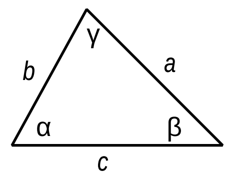
L'objectif poursuivi ici est de trouver les valeurs des angles et des côtés d'un triangle lorsque seulement trois des six quantités apparaissant dans les figures ci-dessus sont connues. Pour ce faire, on utilise la loi des sinus ou la loi des cosinus ou bien une combinaison de ces lois. La précision des calculs est régie par les indications de la table suivante.

Triangles et chiffres significatifs

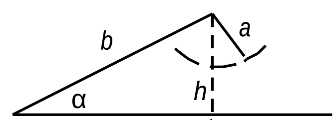
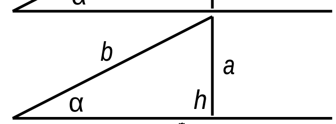
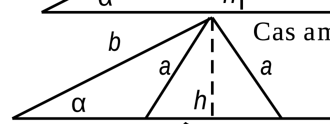
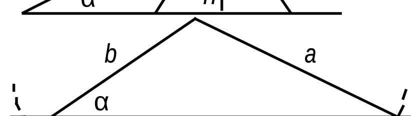
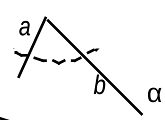
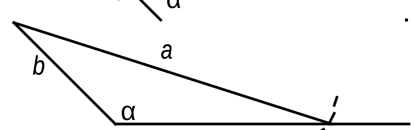
Précision de la mesure de l'angle	*Nombre de chiffres significatifs pour la mesure du côté*
1°	2
10' ou 0,1°	3
1' ou 0,01°	4
10" ou 0,001°	5

La **loi des sinus** est donnée par les égalités suivantes.

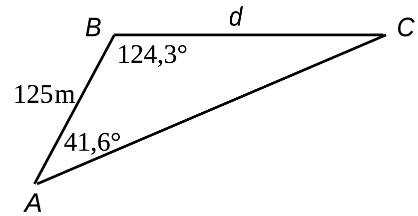
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



La loi des sinus est utilisée généralement pour résoudre les cas ACA (angle, côté, angle), AAC (angle, angle, côté) et CCA (côté, côté, angle) pour les triangles obliques. Le cas AAC se ramène facilement au cas ACA en résolvant en premier pour le troisième angle. Le cas CCA possède un grand nombre de variations, incluant le cas ambigu. Ces variations sont résumées dans la table suivante. Il faut noter que le cas ambigu amène toujours deux triangles, l'un obtus et l'autre aigu.

α	a ($h = b \sin \alpha$)	**Nombre de triangles**	**Figure**
Aigu	$0 < a < h$	0	
Aigu	$a = h$	1	
Aigu	$h < a < b$	2	 Cas ambigu
Aigu	$a \geq b$	1	
Obtus	$0 < a \leq b$	0	
Obtus	$a > b$	1	

Exemple Trouvons la longueur d du segment BC. Afin d'utiliser la loi des sinus pour trouver d, on doit d'abord trouver l'angle <C. On a <C = 180°–124,3°–41,6° = 14,1°. Par la loi des sinus,

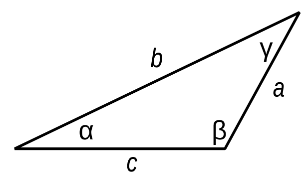


$$\frac{\sin 41{,}6°}{d} = \frac{\sin 14{,}1°}{125}$$

d'où $d = 125\,\dfrac{\sin 41{,}6°}{\sin 14{,}1°} = 340{,}66 \approx 341$ m.

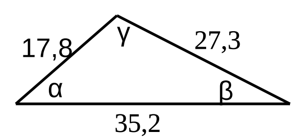
La **loi des cosinus** est donnée par les égalités suivantes.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Cette loi est utilisée dans la première étape de résolution des cas CAC (côté, angle, côté) et CCC (côté, côté, côté) des triangles obliques. Après avoir trouvé un côté ou un angle à l'aide de la loi des cosinus, il est habituellement plus simple de poursuivre la résolution avec la loi des sinus.

Exemple Résolvons le triangle suivant. Par la loi des cosinus, nous pouvons résoudre chacune des équations suivantes.



$$27{,}3^2 = 17{,}8^2 + 35{,}2^2 - 2(17{,}8)(35{,}2)\cos\alpha$$
$$17{,}8^2 = 27{,}3^2 + 35{,}2^2 - 2(27{,}3)(35{,}2)\cos\beta$$
$$35{,}2^2 = 17{,}8^2 + 27{,}3^2 - 2(17{,}8)(27{,}3)\cos\gamma$$

Pour l'angle α on a

$$\cos\alpha = \frac{27{,}3^2 - 17{,}8^2 - 35{,}2^2}{-2(17{,}8)(35{,}2)} \approx 0{,}6469$$

d'où $\alpha \approx \cos^{-1} 0{,}6469 \approx 49{,}7°$. De même, on trouve $\beta \approx 29{,}8°$ et $\gamma \approx 100{,}5°$. Une méthode alternative de calcul consiste à trouver un des angles par le biais de la loi des cosinus, disons $\alpha = 49{,}7°$. Ensuite on utilise la loi des sinus pour trouver β : $\dfrac{\sin 49{,}7°}{27{,}3} = \dfrac{\sin\beta}{17{,}8}$ d'où $\beta \approx 29{,}8°$. Finalement, pour trouver le troisième angle, il suffit d'utiliser le fait que la somme des angles d'un triangle est 180° pour obtenir $\gamma \approx 180 - 49{,}7° - 29{,}8° \approx 100{,}5°$.

6.7 Les identités trigonométriques fondamentales

Cette section se rapporte aux équations trigonométriques appellées **identités**. Rappelons qu'une identité est vraie pour toute substitution de variable(s) pour laquelle les deux membres de l'égalité sont définis, par exemple $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ est vraie quelle que soit la valeur x $\mathbb{R}$. Les onze identités suivantes sont fondamentales dans la manipulation d'expressions trigonométriques que l'on veut transformer en expressions équivalentes.

Identités de réciprocité

$\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$

Identités de quotient

$\text{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Identités avec les négatifs

$\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$

Identités pythagoriciennes

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ $\qquad$ $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$

Notons que les identités pythagoriciennes sont obtenues directement à partir de la figure 6.A en considérant les triangles rectangles appropriés.

Il n'existe pas de méthode unique pour la vérification des identités trigonométriques, les étapes suggérées ici s'avèrent utiles dans plusieurs situations.

Étapes de vérification d'identités

1. Commencer avec le membre le plus complexe de l'identité et le transformer sous la forme de l'autre membre.
2. Essayer des opérations algébriques telles la multiplication, la factorisation, l'addition de fractions ou la séparation de fractions.
3. Si les étapes précédentes n'aboutissent pas, exprimer les fonctions en termes de sinus et cosinus et effectuer ensuite les opérations algébriques appropriées.
4. À chaque étape du processus, garder toujours en mémoire l'autre membre de l'égalité : cela aide à trouver les opérations nécessaires pour parvenir à l'expression visée.

Exemples Vérifions les identités suivantes :

a) $\dfrac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t = \sec t$ b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

c) $\dfrac{3\cos^2 z + 5\sin z - 5}{\cos^2 z} = \dfrac{3\sin z - 2}{1 + \sin z}$.

a) On a, par la mise au dénominateur commun et l'identité $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,

$$\frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} = \sec t .$$

b) En utilisant la différence de carrés et l'identité $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, on a

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)(1)$$
$$= 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x.$$

c) En transformant $\cos^2 z$ en $1-\sin^2 z$ et en factorisant, on obtient

$$\frac{3\cos^2 z + 5\sin z - 5}{\cos^2 z} = \frac{3\left(1 - \sin^2 z\right) + 5\sin z - 5}{\cos^2 z} = \frac{-3\sin^2 z + 5\sin z - 2}{\cos^2 z}$$
$$= \frac{-3\sin^2 z + 3\sin z + 2\sin z - 2}{\cos^2 z} = \frac{3\sin z(-\sin z + 1) - 2(-\sin z + 1)}{\cos^2 z}$$
$$= \frac{(3\sin z - 2)(1 - \sin z)}{\cos^2 z} = \frac{(3\sin z - 2)(1 - \sin z)}{1 - \sin^2 z}$$
$$= \frac{(3\sin z - 2)(1 - \sin z)}{(1 - \sin z)(1 + \sin z)} = \frac{3\sin z - 2}{1 + \sin z} .$$

On sait qu'en général, pour une fonction $f(x)$, $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Il en est de même pour les fonctions trigonométriques.

Exemples Les identités de cet exemple servent à décomposer les fonctions trigonométriques de somme et de différence.

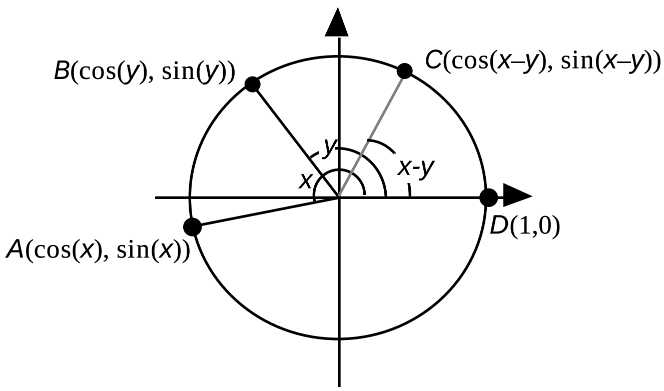
Identités de somme et de différence

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

Afin d'illustrer d'où viennent ces identités, nous démontrons l'identité de différence pour le cosinus $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$. Considérons la figure suivante où l'angle $x-y$ est placé en position standard.



Il est évident que la distance entre les points A et B est la même que celle entre les points C et D. Ainsi, en utilisant d'abord la règle de Pythagore et ensuite en simplifiant les expressions on a

$$(\cos y-\cos x)^2+(\sin y-\sin x)^2=(\cos(x-y)-1)^2+(\sin(x-y)-0)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos^2 y-2\cos x\cos y+\cos^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y+\sin^2 x=\cos^2(x-y)-2\cos(x-y)+1+\sin^2(x-y)$$
$$\Updownarrow$$
$$2-2\cos x\cos y-2\sin x\sin y=2-2\cos(x-y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Utilisons maintenant les identités de somme pour les fonctions sinus et cosinus pour démontrer celle de la tangente. On a

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}.$$

Si $\cos x\neq 0$ et $\cos y\neq 0$, on peut diviser des deux côtés par $\cos x\cos y$ et on obtient

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}.$$

En changeant y pour $-y$ dans l'identité de somme ci-dessus, on obtient l'identité de différence pour la tangente. En effet, puisque $\mathrm{tg}(-y)=-\mathrm{tg}(y)$, on trouve

$$\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}(-y)}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}(-y)}=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}(y)}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}(y)}.$$

Exemples Démontrons les identités de co-fonction suivantes.

Identités de co-fonction (remplacer $\pi/2$ par 90° si x est en degrés)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg} x$$

Il suffit de remplacer x par $\pi/2$ et y par x dans les identités de différence pour obtenir les deux premières identités de co-fonction.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)=0+1\ \sin(x)=\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)=1\ \cos(x)-0=\cos(x)$$

Puisque $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, en posant $\theta=\dfrac{\pi}{2}-x$ et en utilisant les identités de co-fonction ci-dessus, on trouve celle pour la tangente.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\operatorname{cotg}(x)$$

Exemples Il suffit de poser $y = x$ dans les identités de somme, pour trouver les identités du double de l'angle suivantes.

Identités du double de l'angle

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x \qquad \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad \operatorname{tg}(2x)=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

En effet, on a

$$\sin(2x)=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x)=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\operatorname{tg}(2x)=\operatorname{tg}(x+x)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}x}=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

Exemples Démontrons les identités suivantes.

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

On utilise les identités du double de l'angle et l'identité pythagoricienne $1=\cos^2 x+\sin^2 x$ pour trouver les identités $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ et $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. En effet, on a les égalités suivantes.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Il suffit maintenant d'en isoler $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ pour trouver

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

En utilisant les identités de somme et de différence pour les fonctions sinus et cosinus, on peut facilement démontrer les identités suivantes.

Identités de transformation d'un produit en une somme

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right] \qquad \cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

Comme on peut s'y attendre, il existe un nombre inifini d'identités. Nous terminons donc cette section en présentant les identités de la moitié de l'angle et les identités qui permettent de tranformer une somme en un produit de fonctions trigonométriques.

Identités de la moitié de l'angle

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Identités de transformation d'une somme en un produit

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

6.8 Les équations trigonométriques

Rappelons que les **équations conditionnelles** ne sont vraies que pour certaines substitutions de variable(s), par exemple $\sin x = \cos x$ n'est vraie que pour certaines valeurs de x. L'objectif poursuivi dans l'étude d'une équation conditionnelle est de trouver l'ensemble de ses solutions. Dans cette section on s'intéresse d'abord à la résolution des équations trigonométriques fondamentales

$$\sin x = a \qquad \cos x = b \qquad \operatorname{tg} x = c$$

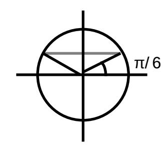
sur une période, puis pour tout x réel. Ensuite, nous obordons des équations trigonométriques plus générales. À nouveau, on ne peut donner une règle absolue qui mènera infailliblement à la résolution de toutes les équations trigonométriques que l'on peut rencontrer. La résolution des équations trigonométriques demande de la manipulation algébrique, l'utilisation d'identités, de la persévérance et ... de l'ingéniosité.

Quelques suggestions pour la résolution d'équations trigonométriques

1. Considérer une fonction trigonométrique particulière comme étant une variable et résoudre l'équation pour cette variable.
2. Utiliser des manipulations algébriques, telle la factorisation.
3. Utiliser des identités trigonométriques.
4. Après avoir résolu pour une fonction trigonométrique, résoudre pour la variable.

Exemples Trouvons toutes les solutions sur $0 \le x \le 2\pi$ de a) $\sin x = 1/2$ et de b) $\sin x = -0{,}4$.

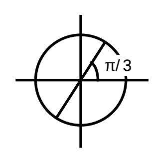
a) On voit facilement que $\sin x = 0{,}5$, sur l'intervalle $[0,2\pi]$, lorsque $x = \pi/6$ ou $5\pi/6$.



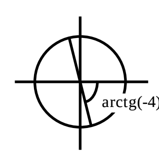
b) On sait que $\sin x = -0{,}4$ lorsque $x = \arcsin(-0{,}4) = -0{,}41152$. Puisqu'on cherche les solutions sur l'intervalle $[0,2\pi]$, on doit maintenant interpréter ce résultat. On constate que les solutions cherchées sont $2\pi - 0{,}41152 = 5{,}87167$ et $\pi + 0{,}41152 = 3{,}55311$.

Exemples Trouvons toutes les solutions sur $-\pi/2 < x < \pi/2$ de a) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ et de b) $\text{tg } x = -4$.

a) Puisque $\text{tg } x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ on sait que $x = \pi/3$ est une solution de équation $\text{tg } x = \sqrt{3}$. On constate qu'elle est la seule solution sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.



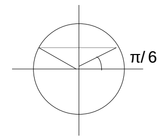
b) On sait que $\text{tg } x = -4$ lorsque $x = \text{arctg }(-4) = -1{,}32582$. On constate qu'elle est la seule solution sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.



Exemples Reprenons chacune des équations ci-dessus et trouvons toutes leurs solutions sur les réels, c'est-à-dire résolvons les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $\sin x = 0{,}5$ b) $\sin x = -0{,}4$ c) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ d) $\text{tg } x = -4$.

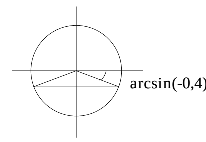
a) Rappelons que les solutions de l'équation $\sin x = 0{,}5$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $x = \pi/6$ et $5\pi/6$. On doit maintenant « tourner la manivelle » pour atteindre toutes les autres solutions réelles possibles. Ainsi, toutes les solutions sont données par $\pi/6 + 2k\pi$ et $5\pi/6 + 2k\pi$ lorsque k parcours les entiers ($\mathbb{Z}$).



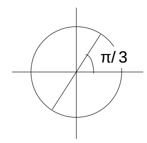
b) On a vu que $\sin x = -0{,}4$ lorsque $x = 5{,}87167$ et $x = 3{,}55311$. Ainsi, par le même argument qu'en a), toutes les solutions sont données par

$$5{,}87167 + 2k\pi \text{ et } 3{,}55311 + 2k\pi$$

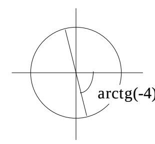
lorsque k parcours les entiers (Z).



c) Rappelons que $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lorsque $x = \pi/3$. Or, on a aussi $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lorsque $x = 4\pi/3$. En fait, quelle que soit la valeur k $\mathbb{Z}$, $x = \pi/3 + k\pi$ est solution de $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.



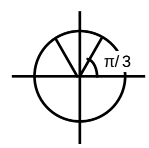
d) Rappelons que $\operatorname{tg} x = -4$ lorsque $x = -1{,}32582$. Ainsi, par le même argument qu'en c), quelle que soit la valeur k $\mathbb{Z}$, $x = -1{,}32582 + k\pi$ est solution de $\operatorname{tg} x = -4$.



Exemples Résolvons les équations

a) $2\sin 4x - \sqrt{3} = 0$ sur l'intervalle $0 \le x \le \pi/2$ et b) $\sin 2x = \sin x$ sur l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$

a) L'équation $2\sin 4x - \sqrt{3} = 0$ est équivalente à $\sin 4x = \sqrt{3}/2$. On sait que les solutions de l'équation $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ sont $\theta = \pi/3 + 2k\pi$ et $\theta = 2\pi/3 + 2k\pi$ où k parcours les entiers ($\mathbb{Z}$).



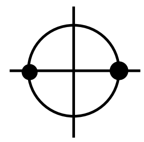
Les solutions de $\sin 4x = \sqrt{3}/2$ sont donc obtenues en considérant $\theta = 4x$. Puisque qu'on s'intéresse aux solutions de l'intervalle $[0, \pi/2]$, c.-à-d. $0 \le x \le \pi/2$, on a qu'à résoudre $4x = \pi/3$ et $4x = 2\pi/3$ et on trouve $x = \pi/12$ et $x = 2\pi/12 = \pi/6$.

b) On transforme l'équation $\sin 2x = \sin x$ en utilisant l'identité $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. On obtient ainsi $\sin 2x = \sin x$ si et seulement si $2\sin x\cos x = \sin x$. Nous ne simplifions PAS $\sin x$ de part et d'autre (pourquoi ?). En fait, on a :

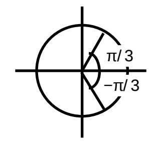
$$\begin{aligned}
\sin 2x = \sin x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = \sin x \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) = 0
\end{aligned}$$

Il suffit de résoudre les équations $\sin x = 0$ et $2\cos x - 1 = 0$.

Sur l'intervalle $[0,2\pi]$, on a trois solutions pour l'équation $\sin x = 0$, elles sont $x = 0$, $x = \pi$ et $x = 2\pi$.



De plus, $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1/2$. Or, $\cos x = 1/2$ en $\pm\pi/3$, puisqu'on s'intéresse aux solutions sur l'intervalle $[0,2\pi]$, les solutions cherchées sont $\pi/3$ et $5\pi/3$.



Les solutions de l'équation $\sin 2x = \sin x$ sont donc 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ et 2π.

Exemple Résolvons $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta$ sur l'intervalle $0° \le \theta \le 360°$. Transformons cette équation en une équation quadratique en $\cos\theta$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right) = \cos\theta \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0
\end{aligned}$$

En utilisant la formule quadratique (penser à $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ comme étant une quadratique en $\cos\theta$, $2\square^2 - \square - 1 = 0$) on trouve que $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1/2$. Il suffit maintenant de résoudre ces deux équations. On sait que, sur l'intervalle $0° \le \theta \le 360°$, $\cos\theta = 1$ en $\theta = 0°$ ou $360°$ et que $\cos\theta = -1/2$ en $\theta = 120°$ ou $240°$. Les solutions de $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta$ sont donc $0°$, $120°$, $240°$ et $360°$.

Exemple Résolvons $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x = 1$ sur l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$. Nous pouvons réécrire cette équation comme suit :

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x + 1}{\sin x} = 1$$

En multipliant les deux côtés de la dernière équation par $\sin x$, on a à résoudre $\cos x + 1 = \sin x$. Puisque $\sin x$ était au dénominateur, les équations

$$\frac{\cos x + 1}{\sin x} = 1 \text{ et } \cos x + 1 = \sin x$$

ne sont pas équivalentes. Par contre, toutes les solutions de la première équation sont aussi des solutions de la deuxième. De même, en prenant le carré de chacun des côtés de $\cos x + 1 = \sin x$, on trouve

$$\begin{aligned}
(\cos x + 1)^2 = \sin^2 x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin^2 x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos x\left(\cos x + 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x\left(\cos x + 1\right) = 0
\end{aligned}$$

Les solutions cherchées sont celles de $(\cos x + 1)^2 = \sin^2 x$ qui satisfont l'équation cotg$x$ + cosec$x$ = 1. Pour résoudre $(\cos x + 1)^2 = \sin^2 x$ il suffit, par le développement précédent, de résoudre cos$x$ = 0 et cos$x$ = –1. Or, sur l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$, les solutions de l'équation cos$x$ = 0 sont $x = \pi/2$ et $x = 3\pi/2$ et la solution de cos$x$ = –1 est $x = \pi$. Sur l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$, les solutions *potentielles* de l'équation cotg$x$ + cosec$x$ = 1 sont donc $\pi/2$, π et $3\pi/2$. Remplaçant chacune des valeurs $\pi/2$, π et $3\pi/2$ dans cotg$x$ + cosec$x$ = 1 on trouve qu'il n'y a que $x = \pi/2$ qui est solution de l'équation cotg$x$ + cosec$x$ = 1.

6.9 Exercices

1.* Trouver la mesure, en radians, de l'angle central au cercle de rayon 6 cm, soutenu par un arc de 15 cm.

2.. Dans un cercle de rayon 3 cm, quelle est la longueur de l'arc soutenant un angle de 2,5 radians ?

3. Exprimer 1,37 radians en degrés.

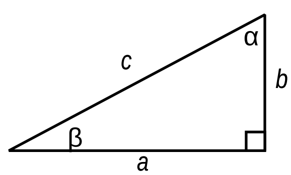
4.* Déterminer les quadrants pour lesquels les valeurs suivantes sont négatives.

a) sinθ b) cosθ c) tg θ

5. Si (4,–3) est situé sur le côté final de l'angle θ, trouver

a) sinθ b) sec θ c) cotg θ

6. Soit le triangle de référence



Résoudre les triangles suivants.

a) où $\beta = 35{,}2°$ et c = 20,2 pieds. b) où a = 15,7 cm et b = 13,3 cm.

7.* Quelle est la période de chacune des fonctions suivantes ?

a) $y = \cos x$ b) $y = \operatorname{cosec} x$ c) $y = \operatorname{tg} x$

8. Quels sont le domaine et l'image des fonctions suivantes ?

a) $y = \sin x$ b) $y = \operatorname{tg} x$

9. Tracer le graphe des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

a) $y = \sin x, \ -2\pi \le x \le 2\pi$ b) $y = \operatorname{cotg} x, \ -\pi < x < \pi$.

10. Lesquelles des valeurs suivantes sont égales à cos 3 ?

a) cos 3° b) cos (3 rad) c) cos $(3+2\pi)$

11.* Pour quelles valeurs de x, $0 \le x < 2\pi$, les fonctions suivantes sont-elles indéfinies ?

a) tg x b) cotg x b) cosec x

Problèmes 12 à 17 : évaluer (sans l'aide d'une calculatrice)

12. tg 0 **13.** sec 90° **14.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **15.** cosec 300°

16. sin 570° **17.** $\operatorname{cotg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

Problèmes 18 à 20 : évaluer (en utilisant une calculatrice)

18. cos 423,7° **19.** tg 93°46'17" **20.** sec (–2,073)

21. Résoudre sur $-2\pi \le x \le 2\pi$:

a) $\sin x = 0$ b) $\operatorname{cotg} x = 0$

22.* Pour quelles valeurs de k a-t-on

a) $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$? b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$?

23. Tracer le graphe de $y = -2\cos \pi x$, sur l'intervalle $-1 \le x \le 3$. Indiquer son amplitude et sa période.

24. Trouver les paramètres A et B de l'équation $y = A \cos Bx$ dont le graphe est

25. Tracer le graphe de $y = 3\sin\left[(x/2) + (\pi/2)\right]$ sur l'intervalle $-4\pi \le x \le 4\pi$.

Problèmes 26 à 33 : évaluer (sans l'aide d'une calculatrice)

26.* arccos(1) **27.** $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ **28.** $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ **29.** arctg(–1)

30. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ **31.** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **32.** cos[arccos(0,33)] **33.*** $\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

Problèmes 34 à 38 : évaluer (en utilisant une calculatrice)

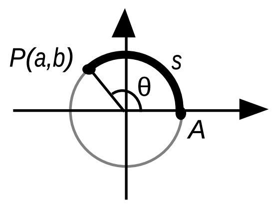
34. arcsin(–0,8277) **35.** arccos (–1,3281) **36.** arctg(75,14) **37.** cosec[arccos(–0,4081)]

38. arcsin[tg(1,345)]

39.* Soit A, le point de coordonnées (8, 0) et s=20 unités, trouver :

a) la valeur exacte, en radians, de θ

b) les coordonnées du point P.



40. Trouver le plus petit réel positif tel que $\cos x = -\frac{1}{2}$.

41. Évaluer, à l'aide d'une calculatrice, $\sqrt{3{,}204} - \arcsin(-0{,}6443)$.

Problèmes 42 et 43 : vérifier chacune des identités

42.* $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \operatorname{cosec} x$

43. $\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec^2 x$

44. Écrire $\sin 5\alpha \cos 3\alpha$ sous forme d'une somme.

45. Écrire $\cos 7x - \cos 5x$ sous forme de produit.

46. Simplifier $\sin\left(x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$

Problèmes 47 à 50 : résoudre (θ en degrés, x réel)

47. $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0, 0° \le \theta < 360°$

48. $\sin x \operatorname{tg} x - \sin x = 0$, $0 \le x < 2\pi$.

49. $\sin x = 0{,}7088, 0 \le x < 2\pi$

50.* $\cos\theta = 0{,}2557, -180° \le \theta \le 180°$

Problèmes 51 à 54 : vérifier chacune des identités

51. $\dfrac{1-2\cos x - 3\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-3\cos x}{1-\cos x}$

52. $(1-\cos x)(\csc x + \cot x) = \sin x$

53. $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

54. $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Problèmes 55 à 59 : résoudre (θ en degrés, x réel)

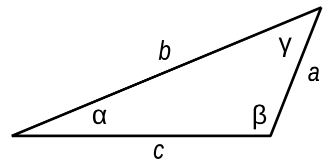
55.* $4\sin^2 x - 3 = 0, 0 \le x < 2\pi$

56. $2\sin^2\theta + \cos\theta = 1, 0° \le \theta \le 180°$

57. $2\sin^2 x - \sin x = 0,\ x \quad \mathbb{R}$

58. $\cos\theta = 0{,}2557$, tout θ

59. $\sin^2 x + 2 = 4\sin x, 0 \le x < 2\pi$



Problèmes 60 à 62 : En vous référant au triangle ci-dessus, résoudre les triangles suivants.

60.* $\alpha = 67°$, $\beta = 38°$, et c = 49 mètres

61. $\alpha = 15°$, $b = 9{,}1$ pieds et c = 12 pieds

62. β = 115,4° , a = 5,32 cm , c = 7,05 cm

63.* Dans un cercle de rayon 6 m, trouver la longueur de l'arc soutenant un angle de 18° .

Problèmes 64 à 70 : évaluer sans la calculatrice

64.* $\sin(-5\pi / 6)$ **65.** $\mathrm{tg}(\pi / 2)$ **66.** $\mathrm{cotg}(7\pi/4)$ **67.** sec 330°

68. arccos(–1) **69.** arcsin(1,5) **70.** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

<u>**Solutions**</u>

1. 2,5 radians **2.** 7,5 cm

3. 78,50° **4.** a) III, IV b) II, III c) II, IV

5. a) $-\dfrac{3}{5}$ b) $\dfrac{5}{4}$ c) $-\dfrac{4}{3}$

6. a) $\alpha = 54{,}8°$; $a = 16{,}5$ *pi*; $b = 11{,}6$ *pi*

b) α = 49,7° ; $\beta = 40{,}3°$; $c = 20{,}6$ cm

7. a) 2π b) 2π c) π

8. a) Domaine : R; Image : $[-1,\ 1]$

b) Domaine : R sauf les valeurs $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi, \ldots$, où k Z ; Image : R

9. a) b)

10. b) et c)

11. a) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ b) $\theta = 0, \pi$ c) $\theta = 0, \pi$

12. 0 **13.** Non défini **14.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **15.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ *ou* $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

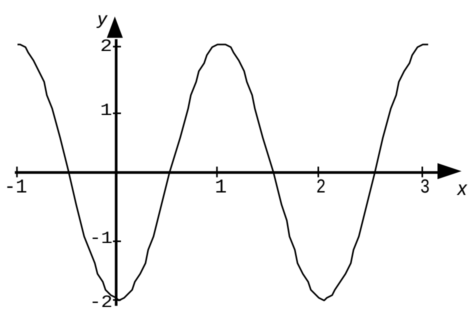
16. $-\frac{1}{2}$ **17.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ *ou* $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **18.** 0,4431 **19.** –15,17

20. –2,077

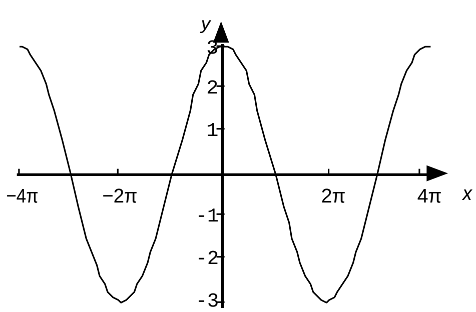
21. a) $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ b) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

22. a) k Z b) k Z

23. A = 2; P = 2 **24.** $y = 6\cos 2x;\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$



25.



26. 0 **27.** $\frac{\pi}{4}$ **28.** $\frac{\pi}{3}$ **29.** $-\frac{\pi}{4}$ **30.** $-\frac{\pi}{6}$ **31.** $\frac{5\pi}{6}$

32. 0,33 **33.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **34.** –0,9750 **35.** Non défini **36.** 1,557

37. 1,095 **38.** Non défini

39. a) 2,5 radians b) $(-6,41\ ,\ 4,79)$ **40.** $\frac{2\pi}{3}$

41. 2,490 **44.** $\frac{1}{2}\sin 8\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ **45.** $-2\sin 6x \sin x$

46. $\cos x$ **47.** $135°,\ 225°$ **48.** $0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$

49. 0,7878 , 2,3538 **50.** ±75,1849° **55.** $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$

56. $0°\ ,\ 120°$ **57.** $k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi,\ k$ parcourt Z

58. $\theta = \pm 75,18° + k\,360°,\ k$ parcourt Z **59.** 0,6259 , 2,516

60. $\gamma = 75°\ ,\ a = 47m,\ b = 31\ m$

61. $a = 4,00$ pi, $\beta = 36°\ ,\ \gamma = 129°$

62. $b = 10,5$ cm, $\alpha = 27,2°\ ,\ \gamma = 37,4\ °$

63. 1,88 m **64.** $-\frac{1}{2}$ **65.** Non défini **66.** –1

67. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **68.** π **69.** Non défini **70.** $\frac{2\pi}{3}$