Chapitre 5

Les fonctions exponentielles et logarithmiques

5.1 Les fonctions exponentielles

Le tableau suivant contient les différentes valeurs que prennent la fonction polynomiale x^2 et les fonctions exponentielles 2^x et $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ pour les valeurs entières x allant de –3 à 10. Lorsque x croît, la fonction 2^x croît plus « rapidement » que x^2 tandis que la fonction $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ prend des valeurs de plus en plus rapprochées de 0.

x	x^2	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$
–3	9	1/8	8
–2	4	1/4	4
–1	1	1/2	2
0	0	1	1
1	1	2	1/2
2	4	4	1/4
3	9	8	1/8
4	16	16	1/16
5	25	32	1/32
6	36	64	1/64
7	49	128	1/128
8	64	256	1/256
9	81	512	1/512
10	100	1024	1/1024

On sait ce que signifient 2^x et $(1/2)^x$ lorsque x est un nombre rationnel, x $\mathbb{Q}$, et nous verrons un peu plus loin ce que signifient 2^x et $(1/2)^x$ lorsque x est un nombre irrationnel, x $\mathbb{I}$. On peut tracer approximativement les graphes des fonctions $f(x) = 2^x$ et $g(x) = (1/2)^x$ à l'aide du tableau de valeurs précédent.

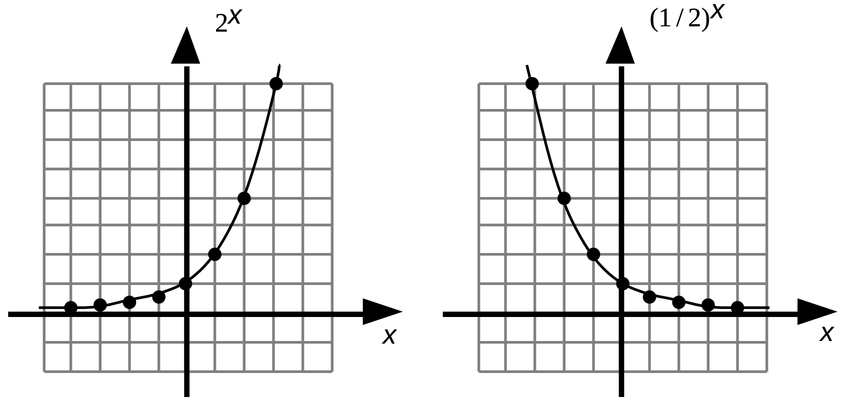
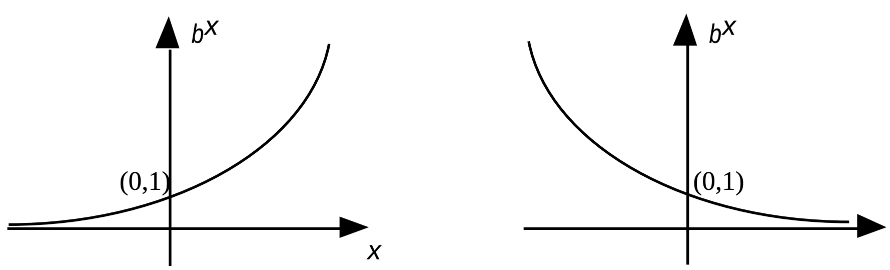


figure 5.1

On remarque que le graphe de la fonction $g(x) = (1/2)^x$ est obtenu de celui de la fonction $f(x) = 2^x$ par une réflexion selon l'axe des y. Ceci est cohérent avec ce qu'on a vu au chapitre 4 puisque

$$g(x) = (1/2)^x = 2^{-x} = f(-x).$$

De façon générale, l'équation $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, définit une **fonction exponentielle** en base b dont le graphe est donné aux figures suivantes.



$b>1$ $0<b<1$

figure 5.2

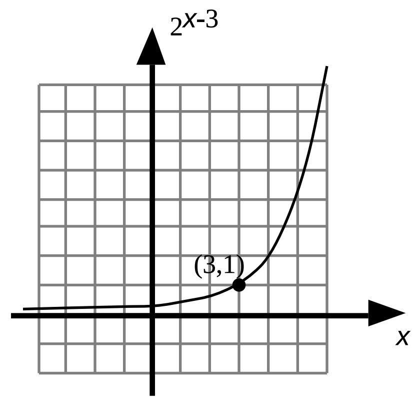
On considère que x est une variable réelle, x $\mathbb{R}$, et que la fonction $f(x) = b^x$ est aussi à valeurs réelles, c'est-à-dire que quelle que soit la valeur réelle x, b^x est aussi une valeur réelle. Ainsi, en ayant la restriction $b > 0$ on évite les racines paires de nombres négatifs (par exemple $(-1)^{1/2}$ $\mathbb{R}$) qui, comme on le sait, ne sont pas des nombres réels. De plus, pour considérer la fonction b^x comme une exponentielle, la base b doit être différente de 1. En effet, si $b = 1$, la fonction $b^x = 1^x = 1$, pour x $\mathbb{R}$, est une fonction linéaire et on veut bien distinguer les fonctions linéaires des fonctions exponentielles.

Le domaine de la fonction $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, est l'ensemble des nombres réels $]-\infty,\infty[$ et son image est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls $]0,\infty[$. Son graphe est une courbe continue qui passe toujours par le point (0,1) et l'axe des x en est une asymptote horizontale. Lorsque $b > 1$, la fonction b^x est croissante et lorsque $b < 1$, elle est décroissante.

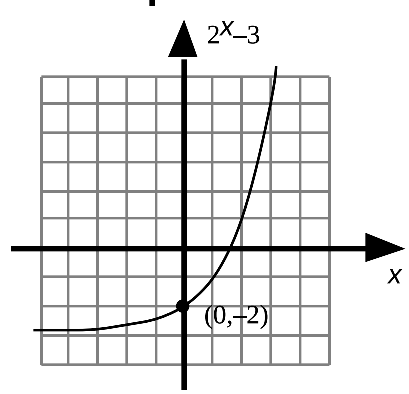
Exemples Pour tracer approximativement le graphe d'une fonction exponentielle on peut construire un tableau de valeurs et relier les points trouvés comme on l'a fait pour les graphes de la figure 5.1. Par contre, il est intéressant d'utiliser les graphes des figures 5.1 et 5.2 comme point de départ et d'utiliser les translations telles qu'on a vues au chapitre 4 pour obtenir des graphes de fonctions exponentielles qui sont obtenues par la composition de fonctions plus simples. Par exemple, traçons les graphes des fonctions suivantes en utilisant le graphe de la fonction $f(x) = 2^x$.

a) $g(x) = 2^{x-3}$ b) $h(x) = 2^x - 3$ c) $q(x) = 3 - 2^x$

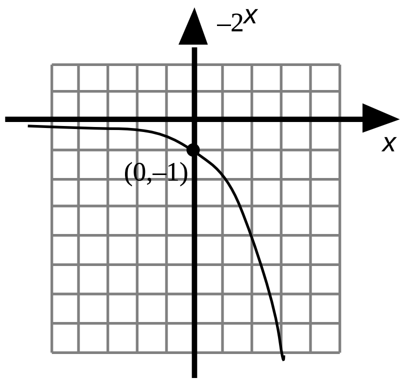
a) Puisque $g(x) = f(x–3)$, le graphe de $g(x)$ est obtenu en translatant celui de $f(x)$ de 3 unités vers la droite. On note que $g(x)$ a aussi l'asymptote horizontale $y = 0$.

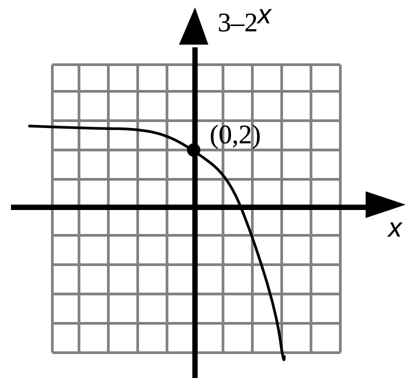


b) Puisque $h(x) = f(x) – 3$, le graphe de $h(x)$ est obtenu en translatant celui de $f(x)$ de 3 unités vers le bas. On note que $h(x)$ a l'asymptote horizontale $y = –3$.



c) Puisque $q(x)=3 – f(x)$, le graphe de $h(x)$ est obtenu en réflètant celui de $f(x)$ par rapport à l'axe des x et ensuite en le translatant de 3 unités vers le haut. On note que $q(x)$ a l'asymptote horizontale $y = 3$.





◪

Il faut bien distinguer la fonction exponentielle définie par $f(x) = b^x$, où la variable indépendante x apparaît comme exposant, de la fonction polynomiale définie par $g(x) = x^n$ où, cette fois, la variable indépendante est la base. Par exemple, $f(x) = 10^x$ est une fonction exponentielle de base 10 et $g(x) = x^{10}$ est la fonction polynomiale puissance dixième. Ainsi, pour $x = 2$, $f(2) = 10^2 = 100$ et $g(2) = 2^{10} = 1024$.

Les lois des exposants sont valides pour les fonctions exponentielles et les **propriétés des fonctions exponentielles** sont, pour $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, x et y deux variables réelles,

1. $\begin{cases} a^x a^y = a^{x+y} & \left(a^x\right)^y = a^{xy} & (ab)^x = a^x b^x \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} & \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & \end{cases}$
2. $a^x = a^y$ si et seulement si $x = y$
3. $a^x = b^x$ pour tout x réel si et seulement si $a = b$

Les premières propriétés servent à simplifier l'expression des fonctions exponentielles tandis que les deux dernières servent à résoudre des équations contenant des exponentielles.

Exemples Simplifions quelques expressions contenant des exponentielles.

a) Les lois des exposants n'ont pas changé depuis le chapitre 1... ainsi,

$$\frac{5^{x-3}}{5^{2x-5}} = 5^{(x-3)-(2x-5)} = 5^{2-x}.$$

b) Il faut faire attention aux bases,

$$\left(\frac{4^x}{5^y}\right)^{3z} = \frac{4^{3xz}}{5^{3yz}} \quad \text{tandis que} \quad \left(\frac{4^x}{4^y}\right)^{3z} = 4^{3z(x-y)}.$$

c) On peut avoir une différence de carrés, comme c'est le cas ici.

$$\left(2^x + 2^{-x}\right)\left(2^x - 2^{-x}\right) = \left(2^x\right)^2 - \left(2^{-x}\right)^2 = 2^{2x} - 2^{-2x} = 2^{2x} - \frac{1}{2^{2x}} = \frac{2^{4x} - 1}{2^{2x}}$$

◪

Exemples Résolvons quelques équations exponentielles.

a) L'équation qui suit implique deux fonctions exponentielles de même base; on doit donc, par la propriété 2, en comparer les exposants.

$$5^{3x} = 5^{4x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 4x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

b) Pour résoudre l'équation exponentielle $27^{x+1} = 9$, on doit d'abord utiliser les lois des exposants pour ramener les deux côtés de l'égalité à une même base. Par la propriété 2, on peut alors comparer les exposants. C'est ainsi que

$$27^{x+1} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^3\right)^{x+1} = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3(x+1)} = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x+1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{3}.$$

c) De la même façon qu'en b), on peut résoudre l'équation $9^{x^2} = 3^{3x-1}$. Il faut noter que 9^{x^2} signifie $9^{(x^2)}$ et non $\left(9^x\right)^2 = 9^{2x}$.

$$9^{x^2} = 3^{3x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^2\right)^{x^2} = 3^{3x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x^2} = 3^{3x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1$$

◪

Remarque Avant d'utiliser les propriétés des fontions exponentielles, il faut s'assurer que l'équation a bien une forme exponentielle. L'équation suivante n'est pas une équation exponentielle car l'inconnue x n'est pas en exposant. Si nous utilisons tout de même la propriété 3 des exponentielles pour la résoudre, elle nous amène à résoudre une équation linéaire.

$$(1-x)^5 = (3x-2)^5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4}$$

La suite de « si et seulement si » qui précède est valide lorsqu'on considère que x est une variable réelle. Ce n'est pas le cas si l'on considère que x est à valeur complexe puisque l'expression $(1-x)^5 = (3x-2)^5$ possède certainement 5 solutions dans $\mathbb{C}$ tandis que l'équation linéaire $1 - x = 3x - 2$ n'a qu'une seule solution. Considérons maintenant l'équation polynomiale $(1-x)^4 = (3x-2)^4$. On vérifie facilement que $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$ en sont des solutions. La résolution de l'équation linéaire $1 - x = 3x - 2$ ne nous donne que la solution $x = \frac{3}{4}$. Même dans les réels, l'équation $1 - x = 3x - 2$ n'est donc pas équivalente à $(1-x)^4 = (3x-2)^4$. Il faut donc s'assurer que l'équation est exponentielle avant d'utiliser les propriétés des fontions exponentielles. ◆

Deux bases particulières retiennent notre attention. Il s'agit de la base 10 et de la base e que l'on retrouve de façon standard sur les calculatrices. Le symbole « e » à été introduit au XVIIIème siècle par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) pour désigner le nombre irrationnel 2.71828... . Ce nombre est obtenu en considérant l'expression $(1 + 1/m)^m$ lorsque m tend vers ∞.

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$
1	2
10	$2{,}59374\cdots$
100	$2{,}70481\cdots$
1000	$2{,}71692\cdots$
10000	$2{,}71814\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	e

Exemples Simplifions quelques expressions contenant des exponentielles en base e.

a) $\dfrac{5x^4e^{5x}-2x^3e^{5x}}{x^8}=\dfrac{x^3e^{5x}(5x-2)}{x^8}=\dfrac{e^{5x}(5x-2)}{x^5}$

b) $\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{2}=\dfrac{\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)+\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{2}=\dfrac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{2}=e^{2x}+e^{-2x}$ ◪

Exemple Pour résoudre l'équation exponentielle $3xe^{-x}+x^2e^{-x}=0$, on effectue d'abord la mise en évidence des facteurs communs,

$$3xe^{-x}+x^2e^{-x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad xe^{-x}(3+x)=0\,.$$

Puisque la fonction exponentielle e^{-x} ne s'annule jamais, les solutions de l'équation $3xe^{-x}+x^2e^{-x}=0$ sont celles de l'équation polynomiale $x(3+x)=0$. Ainsi $x=0$ ou $x=-3$ sont les solutions cherchées. ◪

Les fonctions exponentielles servent à modéliser toute une variété de situations de croissance et de décroissance.

1. La *croissance d'une population* peut se modéliser par le modèle *temporel de doublement de taille* $P=P_0 2^{t/d}$, où $P(t)$ est la taille de la population au temps t, P_0 est sa taille initiale et d est le *temps de doublement*, c'est-à-dire, le temps nécessaire pour que la taille de la population double.

2. La *désintégration radioactive* peut se modéliser en utilisant la notion de *demi-vie*,
$$A=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}=A_0 2^{-t/h}$$
où A est la quantité au temps t, A_0 est la quantité initiale et h est la demi-vie, c'est-à-dire, le temps nécessaire pour que la moitié de la matière se décompose.

3. La croissance d'un montant d'argent placé dans un compte à *intérêts composés* est décrite par
$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

où P est le *placement initial*, r est le *taux d'intérêt annuel*, n est le nombre de compositions de l'intérêt par année et A est la *valeur capitalisée* après t années. On dit aussi que P est la *valeur présente* et A est la *valeur future* du placement.

4. La valeur capitalisée d'un placement à *intérêts continus* est donné par $A = Pe^{rt}$ où P est un montant placé à un taux annuel r composé continuellement.

5.2 Les fonctions logarithmiques

La **fonction logarithmique** de base b, notée $f(x) = \log_b x$, est définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle en base b. C'est-à-dire que, pour $b > 0$, $b \neq 1$,

$$\boxed{\log_b x = y \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x}\ .$$

L'affirmation $2^5 = 32$ est donc équivalente à $\log_2 32 = 5$. Ainsi $\log_2 32$ est l'exposant qu'il faut donner à 2 pour avoir 32. En général, $\log_b x$ est <u>l'exposant qu'il faut donner à la base b pour avoir x</u>.

Exemples Traduisons les expressions suivantes sous forme exponentielle.

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

L'exposant qu'il faut donner à 2 pour avoir 8 est 3 donc a) se traduit par $2^3 = 8$. L'exposant qu'il faut donner à 25 pour avoir 5 est 1/2 donc b) se traduit par $25^{1/2} = 5$. Finalement, l'exposant qu'il faut donner à 2 pour avoir 1/8 est –3 donc c) se traduit par $2^{-3} = \frac{1}{8}$. ◪

Exemples Traduisons les expressions suivantes sous forme logarithmique.

a) $49 = 7^2$ b) $3 = \sqrt{9}$ c) $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

L'exposant qu'il faut donner à 7 pour avoir 49 est 2 donc a) se traduit par $\log_7 49 = 2$. Puisque 1/2 est l'exposant qu'il faut donner à 9 pour avoir 3, b) se traduit par $\log_9 3 = \frac{1}{2}$. Finalement, –1 est l'exposant qu'il faut donner à 5 pour avoir 1/5, c) se traduit donc par $\log_5 \frac{1}{5} = -1$. ◪

Exemples Trouvons y, x et b selon le cas.

a) $y = \log_4 8$ b) $\log_3 x = -2$ c) $\log_b 1000 = 3$

Traduisons d'abord a) sous forme exponentielle. On résout maintenant cette nouvelle équation en ramenant les deux côtés de l'égalité à la même base. On obtient donc

$$y = \log_4 8 \quad \Leftrightarrow \quad 4^y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2y} = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}\ .$$

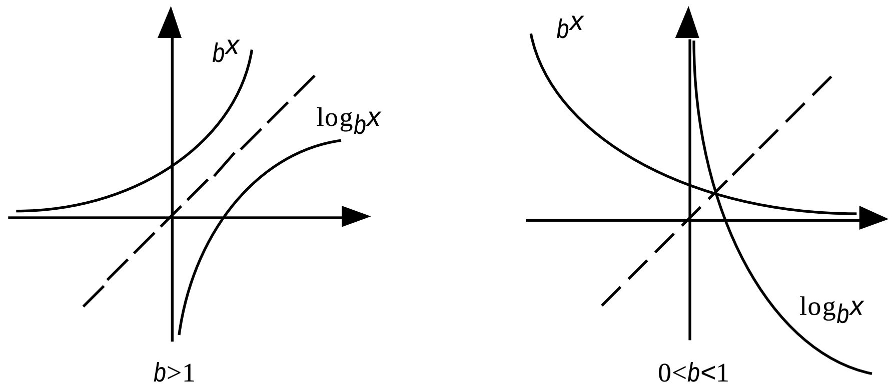
Pour b), on traduit l'expression sous forme exponentielle et on obtient directement

$$\log_3 x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9}\ .$$

En traduisant c) sous forme exponentielle on obtient

$$\log_b 1000 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad b^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1000^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad b = 10\ .$$ ◪

Le domaine de la fonction logarithmique $f(x) = \log_b x$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs $]\,0,\infty\,[$ et son image est l'ensemble des nombres réels $]\,-\infty,\infty\,[$. Son graphe est une courbe continue qui passe toujours par le point (1,0) et pour lequel l'axe des y est une asymptote verticale.



Les **propriétés des fonctions logarithmiques** sont, pour $b > 0$, $b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, p $\mathbb{R}$ et x $\mathbb{R}$,

	propriétés	**exemples**
1.	$\log_b 1 = 0$	$\log_e 1 = 0$
2.	$\log_b b = 1$	$\log_{10} 10 = 1$
3.	$\log_b b^x = x$	$\log_e e^{2x+1} = 2x+1$
4.	$b^{\log_b x} = x\,,\ x > 0$	$10^{\log_{10} 7} = 7$
5.	$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$	$\log_2 3x = \log_2 3 + \log_2 x$
6.	$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$	$\log_2 \frac{x}{5} = \log_2 x - \log_2 5$
7.	$\log_b M^p = p \log_b M$	$\log_2 x^7 = 7 \log_2 x$
8.	$\log_b M = \log_b N \;\Leftrightarrow\; M = N$	$\log_2 x = \log_2 31 \;\Leftrightarrow\; x = 31$

Démonstration. Les trois premières propriétés découlent directement de la définition de la fonction logarithmique, $\log_b x = y \;\Leftrightarrow\; b^y = x$. En effet, quelle que soit la base b, l'exposant qu'il faut donner à b pour avoir 1 est 0 d'où $\log_b 1 = 0$, la propriété 1. L'exposant qu'il faut donner à b pour avoir b est 1 d'où $\log_b b = 1$, la propriété 2. L'exposant qu'il faut donner à b pour avoir b^x est bien x, d'où $\log_b b^x = x$, la propriété 3.

Démontrons maintenant la quatrième propriété. Puisque $y = \log_b x$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour avoir x, en donnant à b cet exposant on a $b^y = x$, c'est-à-dire $b^{\log_b x} = x$.

Pour démontrer les propriétés 5, 6 et 7, on pose $u = \log_b M$ et $v = \log_b N$. Rappelons que

$$u = \log_b M \;\Leftrightarrow\; b^u = M \quad \text{et} \quad v = \log_b N \;\Leftrightarrow\; b^v = N\,.$$

Ainsi, par les propriétés des exposants et la propriété 3 ci-dessus, on a

$$\log_b(MN) = \log_b\left(b^u b^v\right) = \log_b\left(b^{u+v}\right) = u + v = \log_b M + \log_b N\,.$$

De même,

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b\left(\frac{b^u}{b^v}\right) = \log_b\left(b^{u-v}\right) = u - v = \log_b M - \log_b N \quad \text{et}$$

$$\log_b\left(M^P\right) = \log_b\left(\left(b^u\right)^p\right) = \log_b\left(b^{pu}\right) = pu = p\log_b M\,.$$

La huitième propriété découle du fait que la fonction logarithmique est bijective. ■

ATTENTION $\boxed{\dfrac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N \quad \text{et} \quad \log_b(M+N) \neq \log_b M + \log_b N}$

Exemples Décomposons quelques expressions en utilisant les propriétés des logarithmes.

a) $\log_b(a+b)^4 = 4\log_b(a+b)$. Notons que $4\log_b(a+b) \neq 4\log_b a + 4\log_b b$.

b) $\log_b \dfrac{r}{uv} = \log_b r - \log_b uv = \log_b r - \left(\log_b u + \log_b v\right) = \log_b r - \log_b u - \log_b v$.

c) $\log_b\left(\dfrac{m}{n}\right)^{3/5} = \dfrac{3}{5}\log_b \dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{5}\left(\log_b m - \log_b n\right) = \dfrac{3}{5}\log_b m - \dfrac{3}{5}\log_b n$.

d) $\log_b \dfrac{s^2}{t^5u^3} = \log_b s^2 - \log_b t^5u^3 = 2\log_b s - \left(\log_b t^5 + \log_b u^3\right) = 2\log_b s - 5\log_b t - 3\log_b u$. ◪

Exemple En utilisant les propriétés des logarithmes, en sachant que $\log_e 5 \approx 1{,}609$ et que $\log_e 8 \approx 2{,}079$, on peut trouver a) $\log_e \dfrac{5^{10}}{8}$ et b) $\log_e \sqrt[4]{\dfrac{8}{5}}$. En effet, on a successivement

a) $\log_e \dfrac{5^{10}}{8} = \log_e 5^{10} - \log_e 8 = 10\log_e 5 - \log_e 8 \approx 10 \;\; 1{,}609 - 2{,}079 = 14{,}011$

b) $\log_e \sqrt[4]{\dfrac{8}{5}} = \dfrac{1}{4}\log_e \dfrac{8}{5} = \dfrac{1}{4}\left(\log_e 8 - \log_e 5\right) \approx \dfrac{1}{4}\left(2{,}079 - 1{,}609\right) = 0{,}1175$. ◪

Exemples En utilisant les propriétés des logarithmes, on peut traduire l'expression

$$\frac{1}{2}\log_b x - 7\log_b y + \log_b z$$

sous forme d'un seul logarithme. En effet, de la proposition 7 et ensuite de la propriété 5, on a

$$\frac{1}{2}\log_b x - 7\log_b y + \log_b z = \log_b x^{1/2} + \log_b y^{-7} + \log_b z = \log_b \sqrt{x}\,y^{-7}z = \log_b \frac{z\sqrt{x}}{y^7}\,.$$

De même, on peut largement simplifier les expressions $\log_b \dfrac{b}{\sqrt{x}} + \log_b \sqrt{bx}$ et $\log_b\left(x^2-4\right) - \log_b(x-2)$.

$$\log_b \frac{b}{\sqrt{x}} + \log_b \sqrt{bx} = \log_b \frac{b}{\sqrt{x}}\sqrt{bx} = \log_b b\sqrt{b} = \log_b b^{3/2} = \frac{3}{2} \quad \text{et}$$

$$\log_b\left(x^2-4\right)-\log_b(x-2)=\log_b\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\log_b(x+2).$$

◪

Exemple Utilisons les propriétés des logarithmes pour trouver x.

$$\log_b x=\frac{2}{3}\log_b 27+2\log_b 2-\log_b 3$$

On obtient successivement,

$$\begin{aligned}
\log_b x=\frac{2}{3}\log_b 27+2\log_b 2-\log_b 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_b x=\log_b 27^{2/3}+\log_b 2^2-\log_b 3\\
&\Leftrightarrow \quad \log_b x=\log_b 9+\log_b 4-\log_b 3\\
&\Leftrightarrow \quad \log_b x=\log_b \frac{9\ 4}{3}\\
&\Leftrightarrow \quad x=12
\end{aligned}$$

et on constate que, puisque tous ces logarithmes sont dans une même base, x ne dépend pas de la valeur que prend b. ◪

Les logarithmes en base 10 sont appelés **logarithmes décimaux** et sont notés log x. Les logarithmes en base e sont appelés **logarithmes naturels** et sont notés ln x. Puisque les calculatrices n'ont, en général, que les fonctions logarithmiques en base 10 et en base e, pour calculer, par exemple, le $\log_2 7$ il nous faut la **formule de changement de base** suivante.

$$\boxed{\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Démonstration. Pour nous convaincre de la véracité de la formule de changement de base, posons d'abord $y=\log_a x$. On sait que

$$y=\log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y=x$$

Prenons maintenant le logarithme en base b de chacun des côtés de l'égalité $a^y=x$, on obtient

$$a^y=x \quad \Leftrightarrow \quad \log_b a^y=\log_b x \quad \Leftrightarrow \quad y\log_b a=\log_b x \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

■

La formule de changement de base fait le lien entre des logarithmes de bases différentes et est utilisée, à l'aide de la calculatrice, pour calculer des logarithmes en bases autres que e et 10.

Exemple Calculons $\log_2 7$ en utilisant la formule de changement de base. Nous pouvons choisir d'utiliser la base 10 ou bien la base e. On constate que ce choix n'affecte pas le résultat.

$$\log_2 7=\frac{\log 7}{\log 2}\approx\frac{0{,}8451}{0{,}3010}\approx 2{,}807 \quad \text{ou} \quad \log_2 7=\frac{\ln 7}{\ln 2}\approx\frac{1{,}9459}{0{,}6931}\approx 2{,}807\,.$$

◪

Revenons maintenant au sens qu'on donne à b^x lorsque x est un irrationnel, x $\mathbb{I}$. Par exemple, quel sens donne-t-on à 2^{π} ? En fait, on peut définir toute fonction exponentielle b^x en terme de l'exponentielle en base « e » comme suit $\boxed{b^x = e^{x \ln b}}$. En effet, puisque les fonctions e^x et ln x sont inverses l'une de l'autre, on a, par la propriété 7 des logarithmes, $e^{x \ln b} = e^{\ln b^x} = b^x$. Cette fonction est alors définie pour tout x réel. Ainsi, $2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{0{,}6932\pi} \approx e^{2{,}17759} \approx 8{,}8249$. Notons que la calculatrice donne directement le résultat 8,8249... lorsqu'on utilise la touche y^x.

Les applications suivantes illustrent certaines utilisations des logarithmes.

1. L'**intensité** M d'un tremblement de terre sur l'**échelle Richter** est donnée par
$$M = \frac{2}{3}\log\left(E/E_0\right),$$
où E représente l'énergie libérée par le tremblement de terre et $E_0 = 10^{4,4}$ joules est le niveau d'énergie de référence.

2. La vitesse v d'une fusée qui a brûlé tout son carburant est donnée par
$$v = c\ln\left(W_t/W_b\right),$$
où c est la vitesse des gaz d'échappement, W est le poids de la fusée lors du décollage, et W_b est le poids de la fusée sans carburant.

5.3 Les équations exponentielles et logarithmiques

Les diverses techniques utilisées pour résoudre des équations exponentielles telles que $2^{3x-2} = 5$, ou des équation logarithmiques telles que $\log(x+3) + \log x = 1$, sont présentées à travers les exemples de cette section. Notons que nous avons vu aux sections précédentes la résolution des équations exponentielles de base.

Exemple Pour résoudre l'équation $3^x = 16$ on utilise la définition du logarithme en base 3 et la règle de changement de base. Ainsi,
$$3^x = 16 \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_3 16 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\log 16}{\log 3} \approx 2{,}52.$$

Cette méthode de résolution correspond à prendre le logarithme en base 3 des deux côtés de l'égalité,
$$3^x = 16 \quad\Leftrightarrow\quad \log_3 3^x = \log_3 16 \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_3 16 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\log 16}{\log 3} \approx 2{,}52.$$

En fait, il est plus intéressant de résoudre l'équation $3^x = 16$ en prenant le logarithme, dans notre base préférée, des deux côtés de l'égalité. Reprenons l'exemple, mais cette fois en base e,
$$3^x = 16 \quad\Leftrightarrow\quad \ln 3^x = \ln 16 \quad\Leftrightarrow\quad x\ln 3 = \ln 16 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\ln 16}{\ln 3} \approx 2{,}52.$$

Rappelons que c'est la formule de changement de base qui fait le lien entre les logarithmes de bases différentes. Ainsi, quelle que soit la base b, en utilisant la propriété 7 des logarithmes, on a

$$3^x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_b 3^x = \log_b 16 \quad \Leftrightarrow \quad x\log_b 3 = \log_3 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log_b 16}{\log_b 3} \approx 2{,}52.$$

◪

Exemple Pour résoudre l'équation exponentielle $2^{3x-2} = 5$ nous prenons le logarithme en base e des deux côtés de l'égalité.

$$2^{3x-2} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2^{3x-2} = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-2)\ln 2 = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2 + \frac{\ln 5}{\ln 2}}{3} \approx 1{,}44.$$ ◪

Remarque L'ensemble de référence d'une équation est l'intersection de tous les domaines des fonctions qui entrent dans la composition de l'équation. Par exemple, l'ensemble de référence de l'équation

$$\log(2x+1) = 1 + \log(x-2)$$

est l'intersection] –1/2, +∞ [∩] 2, +∞ [=] 2, +∞ [. Les solutions de l'équation seront certainement dans cette intersection et pas ailleurs. Lorsqu'on résout une équation logarithmique, on suppose que la variable appartient à l'ensemble de référence de celle-ci mais, pour éviter les problèmes, on prend l'habitude de vérifier nos solutions et nous rejetons celles qui ne sont pas dans l'ensemble de référence. ◆

Exemple Résolvons l'équation $\log(2x+1) = 1 + \log(x-2)$. Comme nous avons vu à la remarque précédente, nous supposons que x] 2, +∞ [. Nous allons d'abord regrouper sur un même côté de l'égalité tous les termes qui contiennent du logarithme.

$$\log(2x+1) = 1 + \log(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \log(2x+1) - \log(x-2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = 1$$

Pour éliminer le « log », prenons l'exponentielle en base 10 des deux côtés de l'égalité,

$$10^{\log\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)} = 10^1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-2} = 10.$$

Il suffit maintenant de résoudre l'équation rationnelle $\frac{2x+1}{x-2} = 10$. Or, pour $x \neq 2$, on a

$$\frac{2x+1}{x-2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = 10x - 20 \quad \Leftrightarrow \quad 21 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{21}{8}.$$

Puisque 21/8 appartient à l'ensemble de référence de l'équation de départ, elle est bien une solution. Vérifions, tout de même, en remplaçant x par 21/8 dans l'équation de départ.

$$\log\left(2\frac{21}{8} + 1\right) = \log\left(\frac{21}{4} + 1\right) = \log\left(\frac{25}{4}\right) \text{ et } 1 + \log\left(\frac{21}{8} - 2\right) = \log 10 + \log\left(\frac{5}{8}\right) = \log\left(10\frac{5}{8}\right) = \log\left(\frac{25}{4}\right)$$

Puisqu'en $x = 21/8$, on a égalité des deux expressions, 21/8 est bien la solution de l'équation. ◪

Exemple Résolvons l'équation $\ln(x+1) = \ln(3x+1) - \ln x$. On a,

$$\ln(x+1) = \ln(3x+1) - \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+1) = \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right)$$

et pour $x > 0$,

$$\ln(x+1)=\ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) \Leftrightarrow x+1=\frac{3x+1}{x} \Leftrightarrow x^2+x=3x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0.$$

Il suffit maintenant de résoudre l'équation polynomiale $x^2-2x-1=0$.

$$x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}.$$

Puisque $1-\sqrt{2}<0$, il n'appartient pas l'ensemble de référence de l'équation $\ln(x+1)=\ln(3x+1)-\ln x$, c'est-à-dire que $\ln(1-\sqrt{2})$ n'est pas définie, la valeur $1-\sqrt{2}$ est à rejeter. Par contre, $1+\sqrt{2}$ vérifie bien l'équation et en est donc solution. ◪

Exemple Pour résoudre l'équation $\log(\log x)=1$, nous allons d'abord prendre l'exponentielle en base 10 des deux côtés de l'égalité et obtenir,

$$\log(\log x)=1 \Leftrightarrow 10^{\log(\log x)}=10^1 \Leftrightarrow \log x=10$$

où ces équivalences sont valables sur l'ensemble de référence. Prenons encore l'exponentielle en base 10 des deux côtés de la dernière égalité (l'idée est encore de se débarasser des « log »),

$$\log x=10 \Leftrightarrow 10^{\log x}=10^{10} \Leftrightarrow x=10^{10}.$$

On vérifie facilement que $x=10^{10}$ est bien solution de l'équation de départ et le tour est joué. ◪

Exemple Résolvons l'équation $\log x^2=\log^2 x$. Notons qu'en général, $\log x^2 \neq \log^2 x$. En effet,

$$\log x^2 \text{ signifie } \log\left(x^2\right) \text{ et } \log^2 x \text{ signifie } (\log x)^2.$$

En utilisant la propriété 7 des logarithmes, on voit qu'on a une équation quadratique en $\log x$,

$$\log x^2=(\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x=(\log x)^2 \Leftrightarrow 0=(\log x)^2-2\log x.$$

Trouvons, par factorisation (on peut aussi utiliser la formule quadratique), les valeurs pour $\log x$,

$$0=(\log x)^2-2\log x \Leftrightarrow 0=\log x(\log x-2) \Leftrightarrow \log x=0 \text{ ou } \log x=2.$$

Résolvons maintenant ces deux équations,

$$\begin{cases}\log x=0 \Leftrightarrow x=1\\ \log x=2 \Leftrightarrow x=100.\end{cases}$$

On vérifie facilement que ce sont bien deux solutions de l'équation de départ. ◪

Exemple Nous terminons par la résolution d'une équation qui demande un peu plus de stratégie... Nous voulons résoudre l'équation exponentielle suivante.

$$2{,}5=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Pour ramener cette équation à une quadratique en e^x, nous effectuons la mise au dénmominateur commun.

$$\begin{aligned}2{,}5=\frac{e^x+e^{-x}}{2} &\Leftrightarrow 5=e^x+e^{-x} \Leftrightarrow 5=e^x+\frac{1}{e^x}\\ &\Leftrightarrow 5=\frac{e^{2x}+1}{e^x} \Leftrightarrow 5e^x=\left(e^x\right)^2+1\\ &\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-5e^x+1=0.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de résoudre cette quadratique pour e^x et ensuite en déduire x.

$$\left(e^x\right)^2 - 5e^x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Puisque les valeurs $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ sont toutes les deux positives, on peut en prendre les logarithmes en base e pour obtenir,

$$x = \ln\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) \text{ ou } x = \ln\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right).$$

On vérifie que ce sont bien deux solutions de l'équation de départ. ◪

5.4 Exercices

1.* Traduire sous la forme logarithmique.

a) $0{,}0001 = 10^{-4}$ b) $4 = \sqrt[3]{64}$ c) $9 = 27^{2/3}$ d) $\frac{1}{2} = 32^{-1/5}$

e) $m = 10^n$ f) $x = e^y$

2.* Traduire sous la forme exponentielle.

a) $\log_5 125 = 3$ b) $\log_3 81 = 4$ c) $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ d) $\log_{1/3} 27 = -3$

e) $\log\ x = y$ f) $\ln y = x$

3.* Évaluer, à l'aide d'une calculatrice, à 4 chiffres significatifs.

a) $\ln \pi$ b) $2\ 10^{1,32}$ c) $3^{-\sqrt{2}}$ d) $\pi^{\ln 2}$ e) $\log(-e)$ f) $\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$

g) $\frac{\ln 4}{\ln 2{,}31}$ h) $\log_5 23$ i) $\log\left(2{,}156 \times 10^{-7}\right)$

4.* Résoudre sans l'aide d'une calculatrice.

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_3 27 = x$

d) $\log_{1/4} 16 = x$ e) $\ln x = 0$ f) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

g) $\log_x 9 = -2$ h) $\log_x e^5 = 5$ i) $10^{\log_{10} x} = 33$

5.* Évaluer sans l'aide d'une calculatrice.

a) $\log_5 1$ b) $\log_3 3^5$ c) $\log_4(-16)$

d) $\log_7 \sqrt{7}$ e) $\log_6 2 + \log_6 3$ f) $3\log_6 2 - \log_6 3 + 2\log_6 \frac{3}{2}$

6.* Sans utiliser une calculatrice, complèter le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$

$\log x$			,301	,477				,845					

7. Exprimer sous forme d'un seul logarithme à coefficient 1.

a) $3\log_b x + 2\log_b y - \frac{1}{4}\log_b z$ b) $5\left(\frac{1}{2}\log_b u - 2\log_b v\right)$

8.* Décomposer les expressions logarithmiques suivantes.

a) $\log_b \frac{\sqrt{x-1}}{x^3}$ b) $\log\left[(x+3)^5(2x+7)^2\right]$ c) $\ln \frac{(x+10)^7}{(1+10x)^2}$

9.* Simplifier les expressions exponentielles suivantes.

a) $\frac{7^{x+2}}{7^{2-x}}$ b) $\frac{e^{4-3x}}{e^{2-5x}}$ c) $\left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right)^x$

d) $\frac{-2x^3e^{-2x} - 3x^2e^{-2x}}{x^6}$ e) $3^x\left(3^{-x}+1\right) - 3^{-x}\left(3^x+1\right)$ f) $\left(e^x+1\right)\left(e^{-x}-1\right) - e^x\left(e^{-x}-1\right)$

g) $\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$ h) $\frac{e^{-x}\left(e^x - e^{-x}\right) + e^{-x}\left(e^x + e^{-x}\right)}{e^{-2x}}$

10.* Résoudre sans l'aide d'une calculatrice.

a) $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$ b) $4^{x-1} = 2^{1-x}$ c) $25^{x+1} = 125^{2x}$

d) $e^{x^2-3} = e^{2x}$ e) $2x^2e^{-x} = 18e^{-x}$

11.* Résoudre à trois chiffres significatifs.

a) $10^x = 17{,}5$ b) $e^x = 143\ 000$ c) $\ln x = -0{,}01573$

d) $\log x = 2{,}013$ e) $\ln x = -3{,}218$ f) $25 = 5\left(2^x\right)$

g) $4\ \ 5^x = 17$ h) $4\ 000 = 2\ 000\left(e^{0,12x}\right)$ i) $0{,}01 = e^{-0,05x}$

j) $5^{2x-3} = 7{,}08$ k) $\frac{(1{,}12)^x - 1}{0{,}12} = 4$ l) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

m) $2^{5x-1} = 10^{x+1}$ n) $4^{x+2} = 6^{2x-2}$

12.* Résoudre les équations logarithmiques suivantes.

a) $\log_{1/3}(2x+1) = -1$ b) $\log_4\left(\frac{12x+4}{x-4}\right) = 3$

c) $\ln(2x-1) = \ln(x+3)$ d) $\log\left(x^2-3\right) = 2\ \log(x-1)$

e) $\log 3x^2 - \log 9x = 2$ f) $\log x - \log 3 = \log 4 - \log(x+4)$

g) $\ln(x+3) - \ln x = 2\ln 2$ h) $\ln(2x+1) - \ln(x-1) = \ln x$

i) $\log^3 x = \log x^9$ j) $\ln(\log x) = 1$

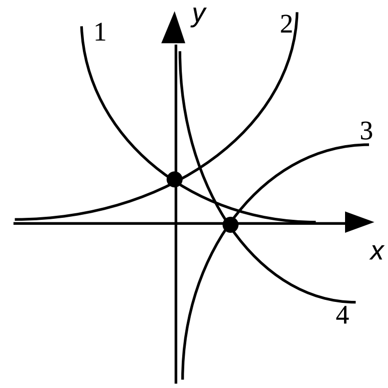
13. Identifier le graphique qui représente le mieux chacune des fonctions décrites par les équations suivantes.

a) $f(x) = e^{x}$

b) $f(x) = (0{,}1)^{x}$

c) $f(x) = \log_{1/3} x$

d) $f(x) = \ln x$



14.* Tracer le graphe de chacune des fonctions suivantes.

a) $y = 2^{x-1}$ b) $f(x) = 3^{x+2} - 5$ c) $f(z) = 1 - e^{-z}$ d) $f(t) = 10e^{-0{,}08t}$

e) $y = \ln(x+1)$ f) $f(x) = 2 + \ln(5x - 3)$

15.* Isoler la variable indiquée.

a) $D = 10\log\frac{I}{I_0}$; I b) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$; x c) $x = -\frac{1}{k}\ln\frac{I}{I_0}$; I

d) $\ln y = -5t + \ln c$; y e) $r = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$; n f) $t = -\frac{1}{k}(\ln A - \ln A_0)$; A

g) $I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$; t

16. Soient $f(x) = 5^{2x}$, $g(x) = \log_3 x$ et $h(x) = 2^{-x}$. Donner

a) leur domaine respectif b) leur image respective c) $f(-1)$, $g\left(\frac{1}{81}\right)$ et $h(x-1)$

d) $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ et $h^{-1}(x)$ e) $125f(x)$, $g(3x)$ et $h^{-1}(h(x))$

17.* Trouver la fonction inverse de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2\ln(x-1)$ b) $f(x) = 5^{3x-1} + 4$ c) $f(x) = 2 + \ln(5x-3)$

d) $f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ e) $f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

18. La croissance d'une culture de bactéries est représentée par une fonction C telle que $C(t) = 12\ \ 8^{t}$ où t est le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience et $C(t)$ est le nombre de bactéries à ce moment-là.

a) Combien y a-t-il de bactéries au début de l'expérience ?

b) À quel rythme les bactéries se multiplient-elles ?

c) Combien y a-t-il de bactéries au bout d'une heure ?

d) Combien y a-t-il de bactéries au bout de 15 minutes ?

e) Au bout de combien de temps y a-t-il 500 bactéries ?

19. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

$$1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{27} < \frac{3}{27} \qquad \text{en divisant les deux côtés par } 27$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{27} < \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \log\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\log\frac{1}{3} < 2\log\frac{1}{3} \qquad \text{en divisant les deux côtés par } \log\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 < 2$$

Solutions

1. a) $\log_{10} 0{,}0001 = -4$ b) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ c) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ d) $\log_{32} \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$

e) $\log m = n$ f) $\ln x = y$

2. a) $5^3 = 125$ b) $3^4 = 81$ c) $81^{1/4} = 3$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

e) $x = 10^y$ f) $y = e^x$

3. a) 1,145 b) 41,79 c) 0,2115 d) 2,211 e) non défini f) 11,59

g) 1,656 h) 1,948 i) –6,666

4. a) $x = 8$ b) $x = 5$ c) $x = 3$ d) $x = -2$ e) $x = 1$ f) $x = 64$

g) $x = 1/3$ h) $x = e$ i) $x = 33$

5. a) 0 b) 5 c) n'existe pas d) 1/2 e) 1 f) 1

6. log 0 n'existe pas; log 1 = 0; log 4 = 2 log 2 = 0,602;

log 5 = log (10/2) = log 10– log 2 = 1–0,301 = 0,699;

log 6 = log(2·3) = log 2+log 3 = 0,778; log 8 = 3 log 2 = 0,903;

$\log 9 = 2 \log 3 = 0{,}954$; $\log 16 = 4 \log 2 = 1{,}204$; $\log 50 = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1 = 1{,}699$;
$\log 500 = \log 5 + \log 100 = 2{,}699$; $\log \sqrt{27} = 3/2 \log 3 = 0{,}7155$

7. a) $\log_b \left(\dfrac{x^3 y^2}{\sqrt[4]{z}}\right)$ b) $\log_b \left(\dfrac{\sqrt{u}}{v^2}\right)^5$

8. a) $\dfrac{1}{2}\log_b(x-1) - 3\log_b x$ b) $5\log(x+3) + 2\log(2x+7)$ c) $7\ln(x+10) - 2\ln(1+10x)$

9. a) 7^{2x} b) $e^{2(1+x)}$ c) e^{2x^2} d) $-\dfrac{e^{-2x}(2x+3)}{x^4}$

e) $3^x - 3^{-x} = \dfrac{3^{2x}-1}{3^x}$ f) $e^{-x} - 1 = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ g) $2\left(1-e^{-2x}\right)$ h) $2e^{2x}$

10. a) $x = 6$ ou -1 b) $x = 1$ c) $x = 1/2$

d) $x = 3$ ou -1 e) $x = 3$ ou -3

11. a) $x = 1{,}24$ b) $x = 11{,}9$ c) $x = 0{,}984$ d) $x = 103$ e) $0{,}0400$ f) $2{,}32$

g) $x = 0{,}899$ h) $x = 5{,}78$ i) $x = 92{,}1$ j) $x = 2{,}11$ k) $x = 3{,}46$ l) $x = 0{,}881$

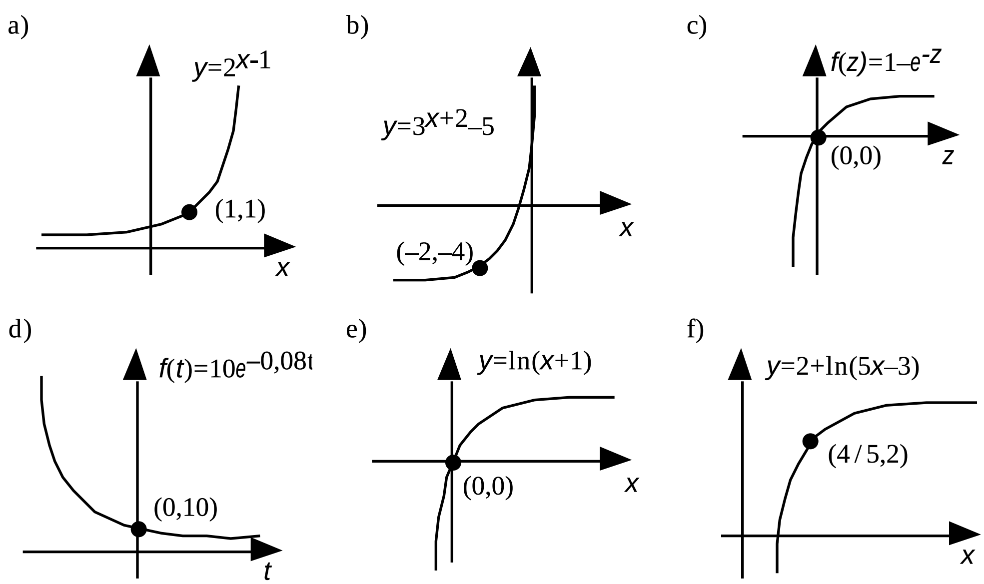
m) $x = 2{,}58$ n) $x = 2{,}89$

12. a) $x = 1$ b) $x = 5$ c) $x = 4$ d) $x = 2$ e) $x = 300$ f) $x = 2$

g) $x = 1$ h) $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ i) $x = 1, 10^3, 10^{-3}$ j) $x = 10^e$

13. a) 2 b) 1 c) 4 d) 3

14.



15. a) $I = I_0 10^{D/10}$ b) $x = \pm\sqrt{-2\ln\left(\sqrt{2\pi}\,y\right)}$ c) $I = I_0 e^{-kx}$ d) $y = ce^{-5t}$

e) $n = -\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{Pi}{r}\right)}{\ln(1+i)}$ f) $A = A_0 e^{-kt}$ g) $t = -\dfrac{L}{R}\ln\left(1-\dfrac{RI}{E}\right)$

16. a) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{dom} g =]0,+\infty[$, $\mathrm{dom} h = \mathbb{R}$ b) $\mathrm{Im} f =]0,+\infty[$, $\mathrm{Im} g = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} h =]0,+\infty[$,

c) $f(-1) = \dfrac{1}{25}$, $g\left(\dfrac{1}{81}\right) = -4$ et $h(x-1) = 2^{1-x}$

d) $f^{-1}(x) = \log_5\sqrt{x}$, $g^{-1}(x) = 3^x$ et $h^{-1}(x) = \log_{1/2} x$ ou $h^{-1}(x) = \log_2 \dfrac{1}{x}$

e) $125 f(x) = 5^{2x+3}$, $g(3x) = 1+\log_3 x$ et $h^{-1}(h(x)) = x$

17. Trouver la fonction inverse de chacune des fonctions suivantes.

a) $f^{-1}(x) = e^{x/2}+1$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1+\log_5(x-4)}{3}$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{x-2}+3}{5}$

d) $f^{-1}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ e) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

18. a) Au début de l'expérience, il y a 12 bactéries.

b) Il y a 8 fois plus de bactéries d'une à l'autre.

c) Au bout d'une heure, il y a 96 bactéries.

d) Au bout de 15 minutes, il y a environ 20 bactéries.

e) Au bout de 1 heure et 48 minutes, il y a 500 bactéries.

19. La relation d'ordre doit être inversée lorsqu'on divise les deux côtés par $\log(1/3)$ car $\log(1/3) < 0$.