

Séminaire du SEG

Jeudi 24 janvier 2019

B-2622 – 12h35 à 13h20

L'addition du cancre et son utilisation pour approximer un réel

Xavier Provençal
Maître d'enseignement, ÉTS

Résumé

Quel enseignant n'a pas déjà pensé changer de métier en lisant sur une copie négligée $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Bien qu'il s'agisse là d'une grossière erreur d'arithmétique, rien n'empêche qu'on peut, en toute rigueur, définir une loi de composition de fractions par $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. On appellera cette opération l'*addition du cancre*. Dans cet exposé, nous verrons comment cette opération permet de construire l'arbre de Stern-Brocot. Des propriétés surprenantes de cet arbre seront présentées et nous ferons un détour par la géométrie discrète afin d'aboutir à un théorème de meilleure approximation permettant de calculer de *bonnes* approximations rationnelles pour un nombre réel quelconque. Par exemple, $\pi \approx \frac{22}{7}$, $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$, $e \approx \frac{87}{32}$, mais aussi $\pi \approx \frac{103993}{33102}$, $\sqrt{2} \approx \frac{8119}{5741}$ ainsi que $e \approx \frac{517656}{190435}$.