

OPERATIONAL MODAL ANALYSIS WITH TIME DOMAIN METHODS ANALYSE MODALE EN OPÉRATION PAR MÉTHODES TEMPORELLES

V-H. Vu¹, M. Thomas², A.A. Lakis³

¹ PhD student, École de technologie supérieure, Montréal, Québec, H3C 1K3, Canada.

² Professor, École de technologie supérieure, Montréal, Québec, H3C 1K3, Canada.

³ Professeur, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada.

ABSTRACT

Operational Modal Analysis (OMA) is a modal analysis based on measuring only the output of a structure and using the ambient or operating forces as unmeasured input. It is used instead of classical mobility-based modal analysis for accurate modal identification under actual operating conditions, and in situations where it is difficult or impossible to artificially excite the structure. For almost civil engineering and mechanical structures, it is difficult to excite artificially due to their physical size, shape or location. They can also be loaded by ambient forces, for example, wave's loads to offshore structures, wind load to buildings or traffic loads to bridges, and operating self-generated vibrations exhibits to machinery. While the general modal analysis is usually conducted in the frequency domain, the modal analysis of these kinds of structures is always based on operational conditions and is preferably measured in the time domain. This presentation aim to develop the algorithms of the well-known time domain methods to identify the dynamic parameters of structures using in the operational modal analysis. They are the power spectrum method, the least square complex exponential method (LSCE) and the Auto-regressive moving average method (ARMA). A case study of a real bridge structure is applied to identify its natural frequencies and damping ratios in a single output testing.

RESUME

L'analyse modale en opération (AMO) est la technique d'analyse modale basée sur seulement les réponses de la structure. Elle utilise les forces ambiantes ou d'opération comme des sources d'excitation. La technique est appliquée au lieu des méthodes classiques lorsqu'il est difficile d'exercer une force artificielle sur la structure en profitant des conditions d'opération actuelles. Pour la plupart des structures de génie civil et de génie mécanique, il est parfois très difficile d'utiliser une force externe connue à cause des dimensions des structures, leur forme ou leur endroit. Les forces sont alors exercées par des forces ambiantes ou forces d'opération comme par exemple sur les structures offshore, le vent sur les édifices, les surcharges sur les ponts et les vibrations sur les grandes machines. Tandis que les méthodes d'analyse modale générales sont traitées dans le domaine fréquentiel, les techniques d'analyse modale en opération sont presque toutes réalisées avec des conditions réelles et dans le domaine temporel. Cet article a pour but d'identifier les paramètres dynamiques des structures dans des conditions d'opération, en développant des algorithmes temporels. Les méthodes utilisées sont la méthode de puissance spectrale, la méthode de moindre carrée complexe exponentielle (LSCE) et la méthode auto-régressive (ARMA). Le cas étudié est un pont réel pour lequel on a déterminé les fréquences naturelles et les taux d'amortissement, en utilisant seulement la réponse vibratoire.

1. INTRODUCTION

L'analyse modale a pour but d'extraire les propriétés dynamiques d'une structure à partir de l'expérimentation. La technique a été développée d'abord dans l'industrie aéronautique dans des années 1940 et est devenue très populaire dans beaucoup de domaines technologiques à partir des années 1970. L'analyse modale est très largement appliquée à nos jours.

Dans presque toutes les structures réelles, comme les structures de génie civil et de génie mécanique, il peut être très difficile d'exercer une force connue pour engendrer une vibration initiale. De plus, les grandes structures subissent souvent des charges naturelles difficilement mesurables. C'est pourquoi l'analyse modale opérationnelle des structures est basée sur les conditions d'opération naturelle. On dit que c'est l'analyse modale en opération. Les avantages de cette méthode sont son prix d'exécution très bas et le fait qu'elle ne demande pas un arrêt de production. L'inconvénient de cette technique est qu'on ne connaît pas l'excitation.

2. LES MÉTHODES D'IDENTIFICATION

Il existe de nombreuses méthodes d'identification modales [1], soit temporelles [2] ou fréquentielles [3].

2.1 Méthode de puissance spectrale

Cette méthode est connue comme la méthode la plus simple pour déterminer les paramètres dynamiques d'une structure. L'idée de cette méthode se base sur le principe de résonance. Quand la fréquence de l'excitation tend vers la fréquence propre de structure, l'énergie devient maximale. Les fréquences naturelles du système sont simplement extraites par l'observation des pics sur le graphique de réponse du périodogramme (figure 1). Les taux d'amortissement sont calculés à partir du facteur de qualité qui définit l'acuité de la résonance. Les formes modales sont calculées à partir des rapports d'amplitudes des pics aux différents points de la structure.

On suppose ω le vecteur des fréquences dans une bande des fréquences mesurées. Ce vecteur est donné dans le domaine fréquentiel ou peut être reformé à partir de mesures temporelles :

$$\omega = F_s [0 \quad 1 \quad \dots \quad (n-1)] = \frac{1}{dt} \frac{1}{n} [0 \quad 1 \quad \dots \quad (n-1)] \quad (2.1)$$

$$F_s = \frac{1}{dt} \frac{1}{n} : \quad \text{La fréquence d'échantillonnage.} \quad (2.2)$$

dt : Le temps d'échantillonnage.

n : Le nombre d'échantillons.

$Y(\omega)$: le vecteur de réponse dans le domaine fréquentiel. Il est donné directement dans le domaine fréquentiel ou peut être transformé à partir de la réponse temporelle par la Transformation de Fourier (FFT).

$$Y(\omega) = \text{FFT}(y(t)). \quad (2.3)$$

Où : $y(t)$ est la réponse temporelle de n points correspondant à n instants mesurés.

En observant le périodogramme on a :

P_i est la puissance d'un pic. Alors la fréquence correspondante ω_i est la fréquence propre de la structure.

Le rapport d'amortissement correspondant à la fréquence naturelle est calculé par la méthode de demi-puissance (ou des 3dB) [4]. À la valeur mi-puissance $\frac{P_i}{2}$, on a 2 valeurs de fréquence ω_i^+ et ω_i^- :

$$\zeta_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{2\omega_i} \quad (2.4)$$

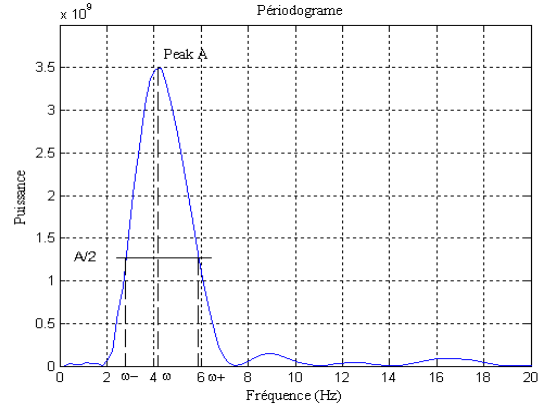


Fig1. Méthode de puissance spectrale

2.2. Méthode des moindres carrés complexes exponentiels (Least Square Complex Exponential-LSCE)

La méthode LSCE a été introduite dans les années 1979 comme le développement de la méthode CE (Complexes exponentielles) [5]. C'est une méthode SIMO qui travaille simultanément avec plusieurs réponses IRFs obtenues en plusieurs points mesurés et engendrées par l'excitation en un seul point.

Considérons une réponse IRFs d'un système SISO :

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_{jk} e^{s_r t} \quad (2.5)$$

ou

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r t} \quad (2.6)$$

où $s_r = -\omega_r \zeta_r + i\omega_r$.

La réponse temporelle $h(t)$ dans un délai L avec les périodes égales $\Delta(t)$:

$$\begin{aligned} h_0 &= h(0) = \sum_{r=1}^{2N} A_r \\ h_1 &= h(\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r (\Delta t)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$h_L = h(L\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r(L\Delta t)}$$

ou plus simplement :

$$\begin{aligned} h_0 &= \sum_{r=1}^{2N} A'_r \\ h_1 &= \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r \\ &\dots\dots\dots \\ h_L &= \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r^L \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $V_r = e^{s_r \Delta t}$ (2.9)

Dans ces formules, A'_r et V_r ne sont pas déterminés. En fait, on peut toujours construire un polynôme en V_r d'ordre L avec les coefficients autorégressifs selon la forme ci-dessous :

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0 \tag{2.10}$$

Pour calculer les coefficients, nous multiplions les équations (2.8) avec les β_j correspondant et faisons la somme :

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = \sum_{j=0}^L (\beta_j \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r^j) = \sum_{r=1}^{2N} (A'_r \sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j) \tag{2.11}$$

On trouve que (2.10) et (2.11) sont les mêmes. Donc il faut que :

$$\sum_{j=0}^L \beta_j h_j = 0 \quad \text{pour chaque } V_r \tag{2.12}$$

De (2.12), en considérant $L= 2N$, avec les β_{2N} égaux à 1, on peut calculer les coefficients de β_j selon les équations :

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \dots \\ h_{4N-1} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

ou plus simplement :

$$[h]\{\beta\} = \{h'\} \quad (2.14)$$

$$(2N \times 2N)(2N \times 1) = (2N \times 1)$$

On développe cette équation pour la procédure globale, avec p réponses IRFs aux p points mesurés. Il faut noter aussi que $\{\beta\}$ sont de quantités globales et sont les mêmes. Donc :

$$\begin{bmatrix} [h_1] \\ [h_2] \\ \dots \\ [h_p] \end{bmatrix} \{\beta\} = \begin{Bmatrix} \{h'\}_1 \\ \{h'\}_2 \\ \dots \\ \{h'\}_p \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

ou $[h_G]\{\beta\} = \{h'_G\}$ (2.16)

On applique la solution des moindres carrés par la technique pseudo inverse [6]:

$$\{\beta\} = ([h_G]^T [h_G])^{-1} [h_G]^T \{h'_G\} \quad (2.17)$$

Avec les valeurs de β_j , on peut utiliser (2.10) pour déterminer les valeurs de V_r et (2.11) pour calculer les fréquences naturelles ainsi que les taux d'amortissement.

2.3. La méthode de AutoRegressive Moving Average (ARMA)

L'algorithme de la méthode ARMA a été développé par Gersch [7] pour les systèmes SISO dans des années 1960.

Considérons le comportement d'un système linéaire avec une seule entrée $f(t)$ et une seule sortie $y(t)$ décrit par une équation différentielle linéaire avec des coefficients constants.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \quad (2.18)$$

On peut aussi établir une équation similaire discrète avec un intervalle Δt des échantillons.

$$\alpha_n y(t-n) + \alpha_{n-1} y(t-n+1) + \dots + \alpha_1 y(t-1) + \alpha_0 y(t) = \beta_m f(t-m) + \beta_{m-1} f(t-m+1) + \dots + \beta_1 f(t-1) + \beta_0 f(t) \quad (2.19)$$

En plus concis :

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k y(t-k) = \sum_{k=0}^m \beta_k f(t-k) \quad (2.20)$$

où α_k et β_k sont nommés des paramètres *autorégressifs* et *moyenne mobile*. Les α_0 et β_0 sont égaux à 1.

Considérons maintenant un système de N DOF, parce que α_0 est égal à 1. On a l'équation (2.20) sous la forme :

$$\alpha_0 y(t) + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k y(t-k) = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k f(t-k) \quad (2.21)$$

$$\text{ou : } y(t) = -\sum_{k=1}^{2N} \alpha_k y(t-k) + \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k f(t-k) \quad (2.22)$$

où : $-\sum_{k=1}^{2N} \alpha_k y(t-k)$ est la partie *auto-régressive*, $\sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k f(t-k)$ est la partie à *moyenne mobile*.

Sous forme de matrices:

$$y(t) = \left\{ -y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-2N) \quad f(t) f(t-1) \dots f(t-2N+1) \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{2N} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Si on prend 2N instants $t=2N+1, 2N+2, \dots, 2N+L$, on aura:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} y(2N+1) \\ y(2N+2) \\ \dots \\ y(2N+L) \end{Bmatrix}}_{(L \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(2N) & \dots & -y(1) & f(2N+1) & \dots & f(2) \\ -y(2N+1) & \dots & -y(2) & f(2N+2) & \dots & f(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(2N+L-1) & \dots & -y(L) & f(2N+L) & \dots & f(L+1) \end{bmatrix}}_{(L \times 4N)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{2N} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix}}_{(4N \times 1)} \quad (2.24)$$

ou simplement : $\underset{(L \times 1)}{\{y\}} = \underset{(L \times 4N)}{[X]} \underset{(4N \times 1)}{\{\theta\}}$ (2.25)

$$\underset{(4N \times 1)}{\{\theta\}} = \underset{(4N \times 4N)}{([X]^T [X])^{-1}} \underset{(4N \times L)}{[X]^T} \underset{(L \times 1)}{\{y\}}$$
 (2.26)

Dans cette équation, les entrées et les sorties sont considérées connues, et la matrice [X] est connue. On peut trouver les 2N valeurs de α_k et β_k . Avec les valeurs de α_k , on peut prendre le polynôme caractéristique du système N DOF:

$$\sum_{k=0}^{2N} \alpha_k u^{2N-k} = 0$$
 (2.27)

ou : $\prod_{k=0}^N (u - u_k)(u - u_k^*) = 0$ (2.28)

ou : $\prod_{k=0}^N (u - e^{s_k \Delta t})(u - e^{s_k^* \Delta t}) = 0$ (2.29)

où s_k et s_k^* nous donnent les fréquences propres et les taux d'amortissement de mode k.

3. APPLICATION

Considérons un cas d'un pont de chemin de fer composé de treillis métalliques (figure 2a,b). On a fait un essai dynamique sur la structure. La charge dynamique utilisée était le passage d'un train donc non mesuré. Les réponses vibratoires ont été mesurées dans le domaine temporel sous les conditions d'opération normale du pont. A cause d'un équipement de mesure restreint, on a installé un seul accéléromètre dans la direction verticale à la position de mi-portée de la deuxième travée. C'est suffisant pour déterminer les fréquences de vibration et les taux d'amortissement associés.

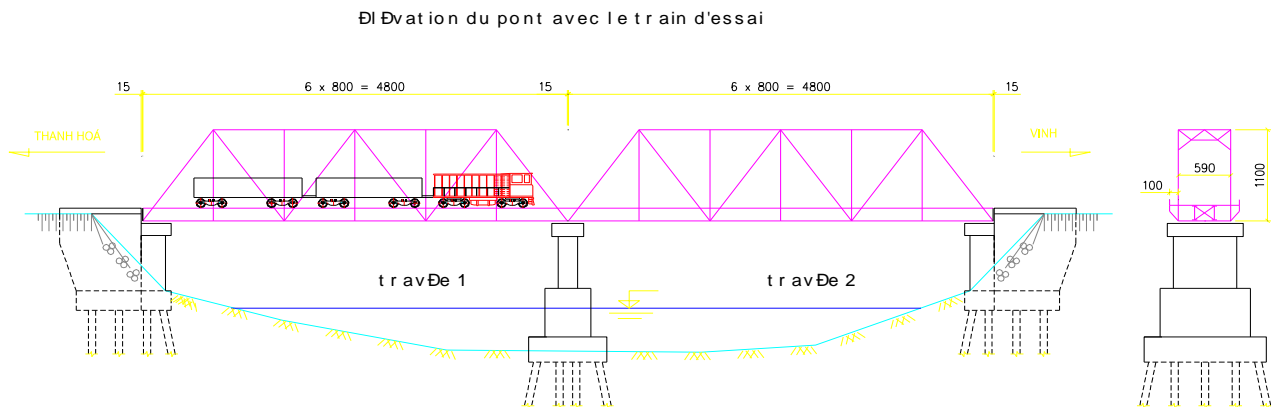


Fig2a, b. Le pont d'essai avec élévation

Les essais ont été réalisés pour deux passages d'un train avec la vitesse à peu près de 40Km/h. Les réponses ont été mesurées avec une précision temporelle de 0.005s (figure 3a,b). Elles sont composées de deux parties, une portion de vibration forcée quand le train se trouve encore sur le pont et une portion de vibration libre transitoire quand le train est déjà sorti du pont. Pour les méthodes d'identification modale dans le domaine temporel, on ne prend que la partie de type impulsive de la réponse (figure 4a,b).

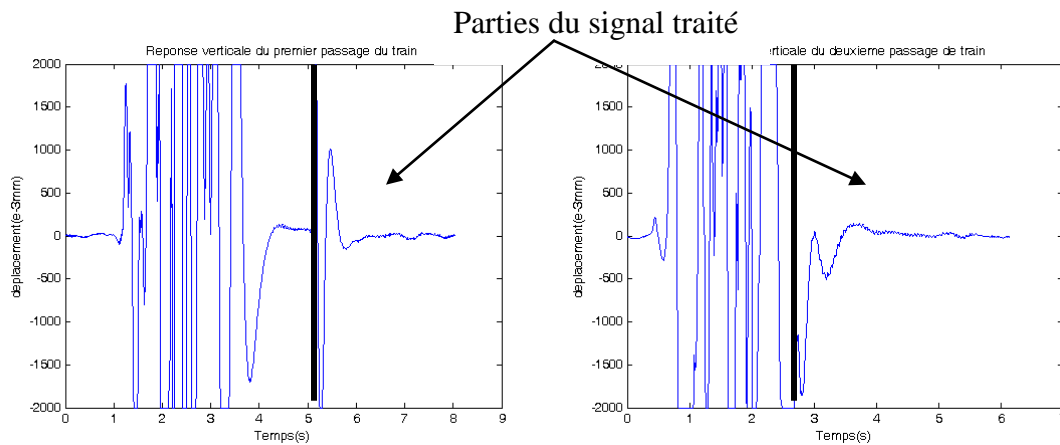


Fig 3a,b. Réponse temporelle des deux passages de train.

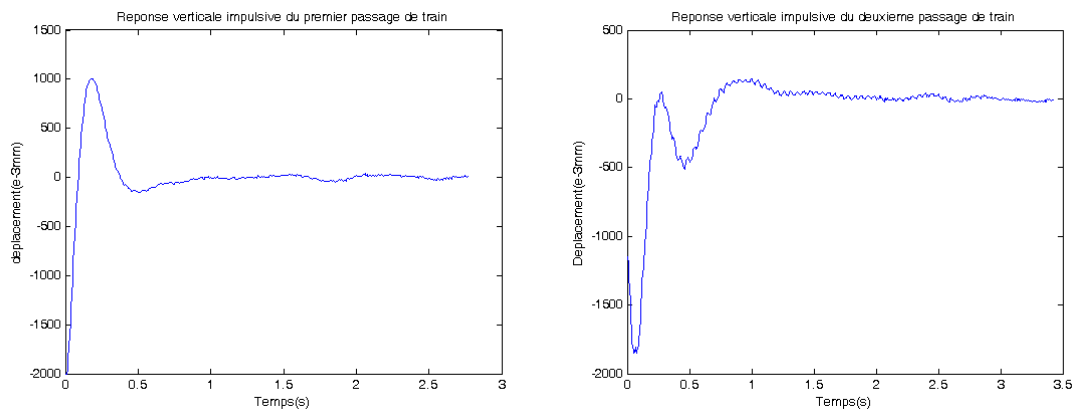


Fig 4a,b. Réponse impulsive des deux passages de train.

3.1 Résultats par la méthode de puissance spectrale

La figure 5a,b montre clairement le premier mode à 2 Hz. Les autres modes sont insuffisamment excités. Les résultats fréquentiels sont cohérents pour les 2 essais comme montré dans le tableau 1. Par contre, l'amortissement n'est pas stable et seulement son ordre de grandeur peut être évalué. Il a varié entre 36 et 57 %.

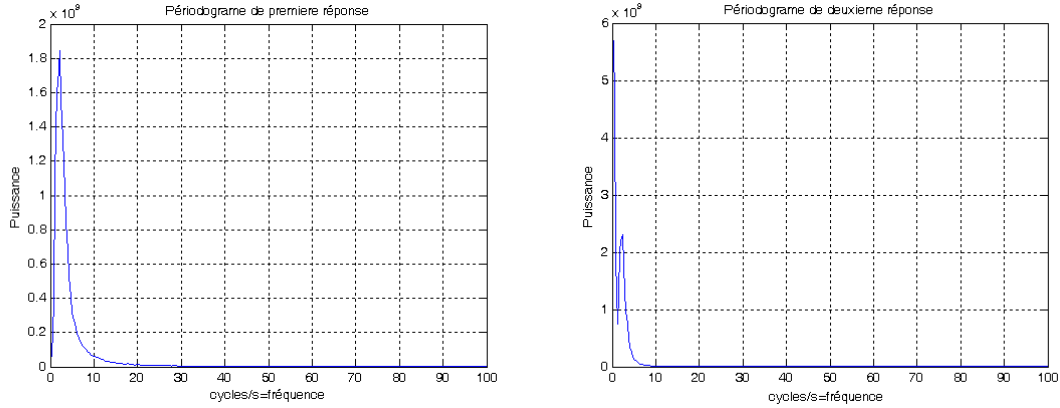


Fig 5a,b. Périodogramme de deux réponses.

Tableau 1. Résultats identifiés par méthode de puissance spectrale.

Passages de train	Fréquence propre (Hz)	Taux d'amortissement
	Mode 1	Mode 1
Passage 1	2.2	57
Passage 2	2.3	36

3.2 Résultats par la méthode de LSCE

Dans une analyse modale expérimentale, il est courant qu'on ne connaisse pas l'ordre réel du système physique. Aussi doit-on considérer dans les méthodes d'identification temporelles un ordre de calcul qui doit être nettement supérieur à l'ordre réel du système (au moins le double), mais pas trop pour ne pas analyser des modes de bruit. La méthode consiste donc à faire l'analyse pour plusieurs ordres de calcul et à vérifier la stabilité des résultats en fonction de cet ordre [8].

L'ordre de modèle N a été analysé entre 2 et 30. Une fréquence est identifiée lorsque la fréquence en fonction de l'ordre est stable (figure 6a,b). Deux modes (2 Hz et 19 Hz) ont été détectés clairement car leurs deux fréquences sont stables pour des ordres entre 20 et 30. Les fréquences se répètent pour les deux passages du train.

Les figures 7 a,b et 8 a,b montrent pour les modes 1 et 2 respectivement, l'étude de stabilité du taux d'amortissement en fonction de l'ordre pour les deux passages du train. L'amortissement diffère de trop pour être jugé valide (figure 7a,b et 8a,b).

On ne peut se fier à l'estimation du taux d'amortissement du premier mode, car il n'est pas stable selon l'ordre du système considéré pour le calcul et parce que la valeur estimée lors du premier passage diffère énormément de celle estimée lors du deuxième passage du train. Par contre, on sait que le premier mode est très amorti. La valeur de 40% semble plus stable lors du 2^e passage du train pour des ordres variant entre 26 et 30.

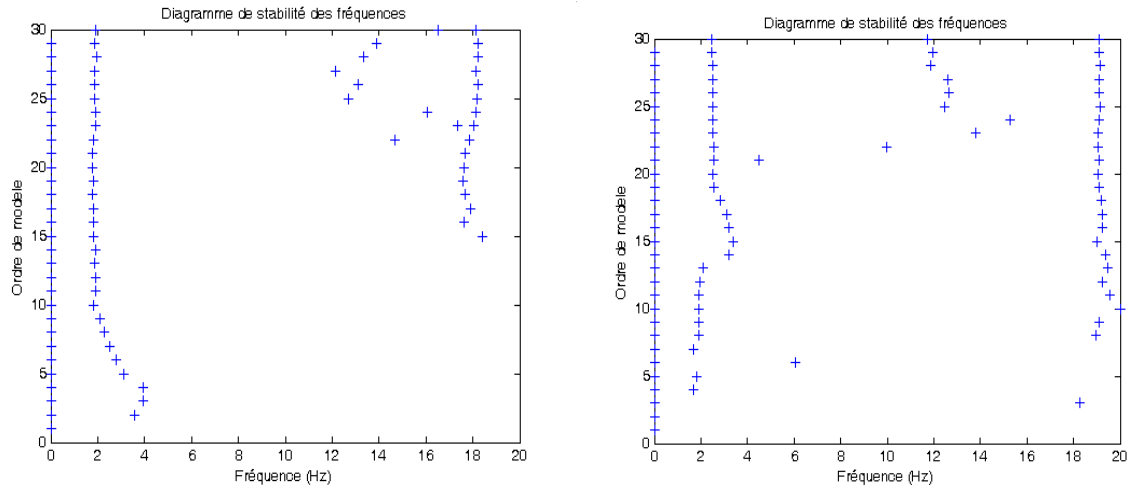


Fig 6 a,b. Diagramme de stabilité des fréquences par LSCE de deux réponses.

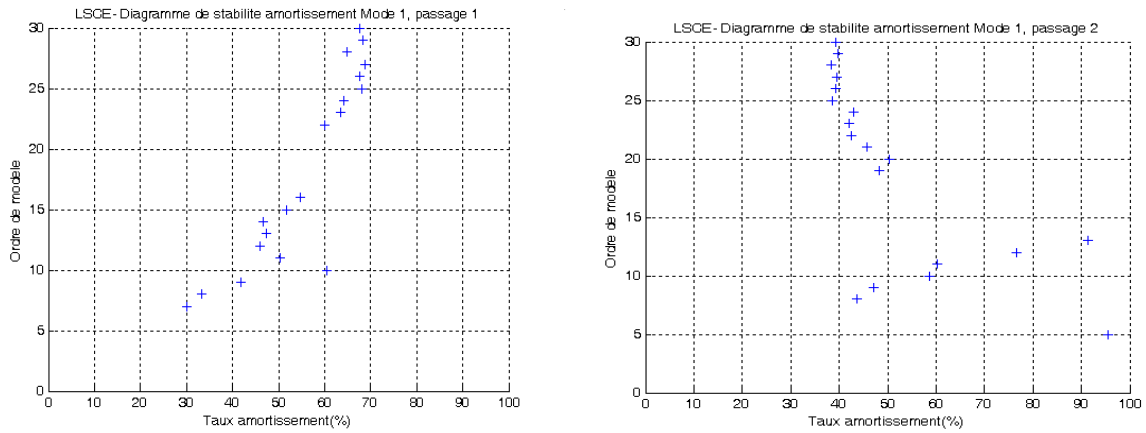


Fig 7 a,b. Diagramme de stabilité du taux d'amortissement du mode 1 par LSCE.

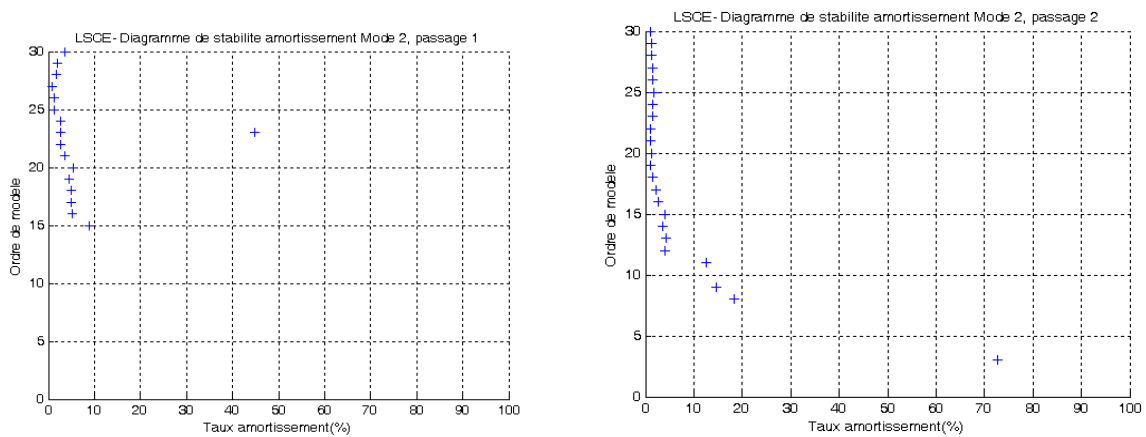


Fig 8a,b. Diagramme de stabilité du taux d'amortissement du mode 2 par LSCE.

Les taux d'amortissement estimés pour le 2^e mode sont plus fiables, car plus stables et plus répétitifs. On peut estimer celui-ci proche de 1.1% car le signal est plus stable lors du 2^e passage du train (figure 8-b). Le tableau 2 résume les résultats obtenus.

Tableau 2. Résultats identifiés par méthode LSCE.

Passage de train	Fréquence propre (Hz)		Taux d'amortissement (%)	
	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
Passage 1	1.9	18.1	67	3.5
Passage 2	2.5	19.1	39	1.1

3.3 Résultats par la méthode ARMA

On a fait varier l'ordre de modèle entre 6 et 30 (figure 9a,b). Les deux fréquences naturelles deviennent stables pour des ordres supérieurs à 12 et se répètent selon le passage du train.

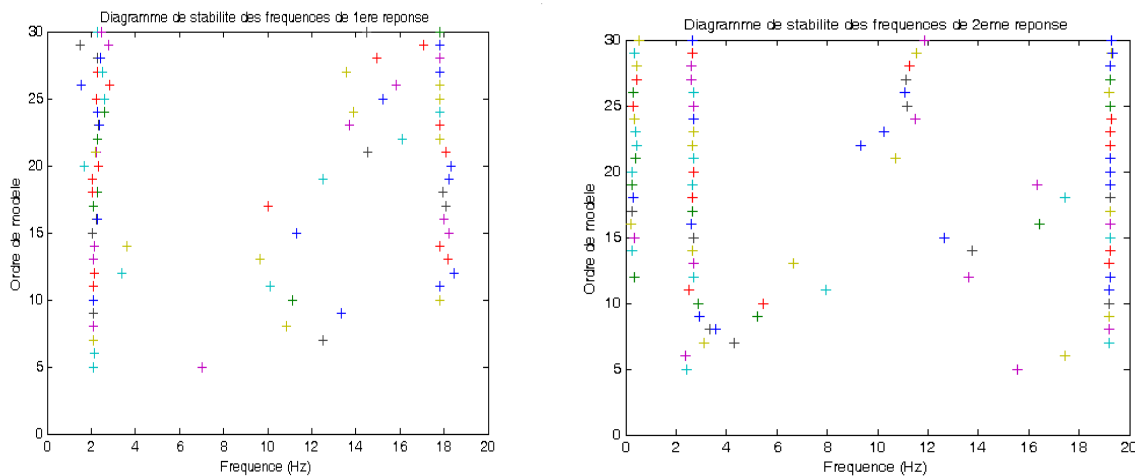


Fig 9a,b. Diagramme de stabilité des fréquences par ARMA de deux réponses.

Les figures 10 a,b et 11 a,b montrent pour les modes 1 et 2 respectivement, l'étude de stabilité du taux d'amortissement en fonction de l'ordre pour les deux passages du train. L'amortissement diffère de trop pour être jugé valide, mais est plus stable qu'avec la méthode LSCE. On ne peut se fier à l'estimation du taux d'amortissement du premier mode, car il n'est pas stable selon l'ordre du système considéré pour le calcul et parce que la valeur estimée lors du premier passage diffère énormément de celle estimée lors du deuxième passage du train. Par contre, on sait que le premier mode est très amorti et son ordre de grandeur se situe entre 41 et 54%.

Les taux d'amortissement estimés pour le 2^e mode sont plus fiables, car plus stables et plus répétitifs. On peut estimer celui-ci entre 0.5 et 1%. Le tableau 3 résume les résultats obtenus.

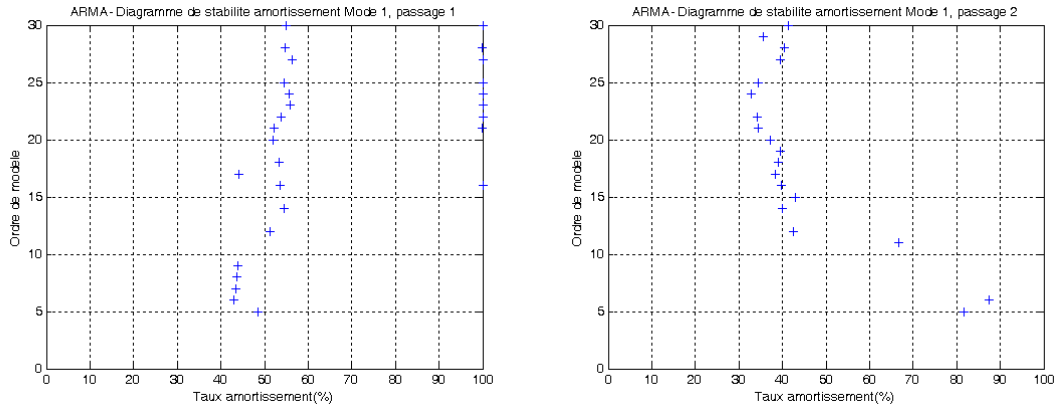


Fig 10a,b. Diagramme de stabilité du taux d'amortissement du mode 1 par ARMA.

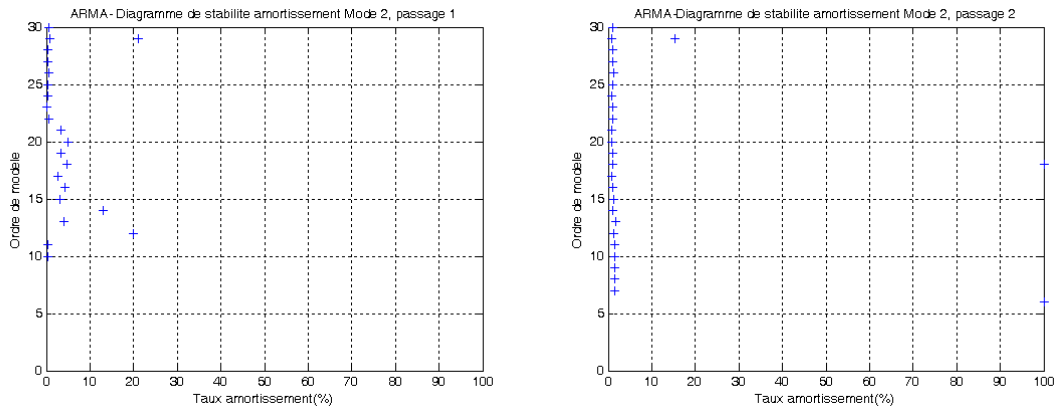


Fig 11a,b. Diagramme de stabilité du taux d'amortissement du mode 2 par ARMA.

Les résultats du tableau 3 montrent que les fréquences se répètent pour les deux passages du train. On peut là encore constater que le premier mode est très amorti alors que le 2^e mode est plus faiblement amorti.

Tableau 3. Résultats identifiés par méthode ARMA.

Passage de train	Fréquence propre (Hz)		Taux d'amortissement (%)	
	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
Passage 1	2.3	17.8	54	0.5
Passage 2	2.6	19.3	41	1.0

4. CONCLUSIONS

Cette recherche présente une étude comparative de l'efficacité de trois méthodes temporelles d'identification modale pour identifier les paramètres modaux d'un pont ferroviaire métallique. Les trois algorithmes sont très simples à appliquer et à développer dans Matlab.

Les méthodes d'analyse modale expérimentale en opération permettent une identification des paramètres modaux de structures excitées naturellement sans avoir à connaître l'excitation. Ces méthodes répondent bien à l'exigence, notamment pour identifier les fréquences, même pour de grandes structures excitées de façon linéaire comme c'est le cas pour un passage d'un train sur un pont. Pour vérifier la répétitivité des méthodes, les vibrations transitoires ont été analysées pour deux passages d'un train. Un seul capteur positionné à mi-travée a été utilisé.

A cause des fréquences basses de vibration et du haut taux d'amortissement de la structure, notamment dans premier mode, la méthode de puissance spectrale n'a pu identifier clairement que la première fréquence et n'a pas donné de bons résultats pour l'identification de l'amortissement. L'ordre de grandeur de l'amortissement du premier mode a été estimé entre 36 et 57%. Les méthodes LSCE et ARMA ont permis d'identifier clairement deux fréquences naturelles. Ces méthodes n'ont pu identifier clairement l'amortissement, mais seulement son ordre de grandeur. Pour le premier mode, la fréquence trouvée par LSCE a varié entre 1.9 Hz et 2.5 Hz avec un taux d'amortissement proche de 39%. La méthode ARMA s'est avérée plus stable que LSCE, notamment pour l'identification de l'amortissement, avec une fréquence qui varie de 2.3 Hz à 2.6Hz et des taux variant entre 41% et 54%. Pour le deuxième mode, la fréquence a varié entre 17.8 Hz et 19.3 Hz avec un taux d'amortissement variant entre 0.5% à 1.1 %. Le deuxième mode est plus faiblement amorti.

Cet essai a été réalisé dans des conditions réelles d'opération sur une structure très grande avec tous les bruits et difficultés inhérentes. Aussi, les résultats ont été jugés très acceptables, notamment en ce qui concerne les méthodes LSCE et ARMA

5. RÉFÉRENCES

1. N.M.M Maia, J.M.M Silva. *Modal analysis identification techniques*. Royal society. No359-2001. pp 29-40.
2. J.Piranda. *Analyse modale expérimentale*. Techniques de l'ingénieur, traité Mesures et Contrôle. R 6 180. 29 pages.
3. Ewins, D.J., 2000. *Modal Testing: Theory and Practice*. Second edition. Research Studies Press, Hertfordshire, UK. pp 287-359.
4. Thomas M. et Laville F., Juin 2005, *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys*, Éditions ÉTS, ISBN 2-921145-52-9, 702 pages.
5. Brown, D.L., Allemang, R.J., Zimmerman, R. & Mergeay, M. 1979. *Parameter estimation techniques for modal analysis*. SAE Technical paper 790221.
6. Nuno M.M Maia, Julio M.M Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. John Wiley and son Inc. 1997. pp 185-264.

7. Gersch W., "Estimation of the autoregressive parameters of a mixed autoregressive moving-average time series," *IEEE Trans. automat. contr.* (Short Papers), VOI. AC- 15, pp. 583-588, Oct. 1970.
8. Smail M., Thomas M. and Lakis A.. *Assessment of optimal ARMA model orders for modal analysis*. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999 13(5): pp 803-819.

6. REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée avec le support en équipements et en enregistrement des données du Département de pont et tunnel de l'école supérieure de transport et de communication de Hanoi, qui est fortement remerciée pour son aide.

7. BIOGRAPHIES

Viet-Hung Vu est un étudiant de doctorat en génie à l'école de technologie supérieure. Ses axes de recherche sont l'analyse modale et les vibrations de structures.

Marc Thomas est un professeur en génie mécanique de l'école de technologie supérieure, spécialisé en maintenance, fiabilité et vibrations. Il est le président du chapitre Québec de l'association canadienne en vibration de machines (ACVM). Il est le directeur de thèse de Viet-Hung Vu.

Aouni.A. Lakis est un professeur en génie mécanique à l'école Polytechnique de Montréal. Il a obtenu son PhD de génie mécanique à université McGill (Montréal). Ses activités de recherche sont l'analyse temps-fréquences, les vibrations aléatoires et l'interaction fluide-structure. Il a développé un logiciel temps-fréquences convivial et polyvalent, applicable à la maintenance des machines