Quelques exercices résolus

Chapitre 1 – Exercices de la section 1.5

n° 1 **A)** Vrai, 3 est bien un élément de l'ensemble A.

B) Vrai, 5 n'est pas un élément de l'ensemble C.

C) Faux, B n'est pas un élément de l'ensemble A; il n'est pas contenu dans A. L'ensemble B est plutôt un *sous-ensemble* de l'ensemble A, $B \subset A$, il n'en est pas un *élément* (même si chacun de ses éléments est aussi élément de l'ensemble A). Par contre, B {1, 2, 3, 4, 5, {1, 2, 3}} puisque maintenant l'ensemble B est un *élément* de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, {1, 2, 3}}.

D) Vrai, B est un *sous-ensemble* de l'ensemble A car chacun des éléments de B est aussi élément de l'ensemble A.

E) Faux, l'ensemble B est bien égal à l'ensemble C puisqu'ils contiennent exactement les mêmes éléments; l'ordre ne compte pas lorsqu'on décrit un ensemble par énumération.

F) Faux, A n'est pas un sous-ensemble de B puisque les éléments de A ne sont pas tous contenus dans l'ensemble B.

n° 3 Pour simplifier une expression comme celle-ci, il faut faire très attention aux signes lorsqu'on distribue un terme sur une différence. Il faut aussi noter que la parenthèse $\left[4-3(x-2)\right]$ ne multiplie que le terme $-3x$.

$$
\begin{aligned}
5x^2 - 3x\left[4-3(x-2)\right] &= 5x^2 - 3x[4-3x+6] && \text{on distribue } -3 \text{ sur la différence } x-2 \\
&= 5x^2 - 3x[10-3x] && \text{on regroupe les termes semblables} \\
&= 5x^2 - 30x + 9x^2 && \text{on distribue } -3x \text{ sur la différence } 10-3x \\
&= 14x^2 - 30x && \text{on regroupe les termes semblables}
\end{aligned}
$$

n° 7 Remarquez que dans l'expression $6\left(xy^3\right)^5$ le coefficient 6 n'est pas affecté par l'exposant 5. Pour simplifier cette expression on procède comme suit.

$$
\begin{aligned}
6\left(xy^3\right)^5 &= 6\left(x^5\left(y^3\right)^5\right) && \text{par la propriété 3 des exposants} \\
&= 6\left(x^5 y^{3\ 5}\right) = 6\left(x^5 y^{15}\right) && \text{par la propriété 2 des exposants} \\
&= 6x^5 y^{15} && \text{par l'associativité de la multiplication}
\end{aligned}
$$

n° 8 L'expression $\dfrac{9u^8v^6}{3u^4v^8}$ peut être simplifiée en regroupant les facteurs semblables.

$$\frac{9u^8v^6}{3u^4v^8} = \frac{9}{3}\ \frac{u^8}{u^4}\ \frac{v^6}{v^8}$$ par la propriété 3 des fractions

$$= 3u^{8-4}v^{6-8} = 3u^4v^{-2} = \frac{3u^4}{v^2}$$ par la propriété 5 des exposants

n° 16 La simplification de radicaux s'effectue plus facilement lorsqu'on utilise la notation en terme des exposants fractionnaires. Les propriétés des exposants fractionnaires sont alors les mêmes que celles des exposants entiers.

$$\sqrt{2x^2y^5}\ \sqrt{18x^3y^2} = \left(2x^2y^5\right)^{1/2}\left(18x^3y^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(2x^2y^5\ 18x^3y^2\right)^{1/2}$$ par la propriété 3

$$= \left(36x^{2+3}y^{5+2}\right)^{1/2} = \left(36x^5y^7\right)^{1/2}$$ par la propriété 1

$$= 6x^{5/2}y^{7/2}$$ par la propriété 3

$$= 6x^{2+1/2}y^{3+1/2} = 6x^2y^3\sqrt{xy}$$ mise sous forme simplifiée

n° 20 **A)** Vrai, par exemple –7 est un entier, il est rationnel car il peut s'écrire comme une fraction –7/1 et il est réel car il possède une représentation décimale –7,0. Plus généralement, la suite d'inclusions $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ signifie que tous les nombres entiers sont des éléments de l'ensemble des nombres rationnels et tous les nombres rationnels sont éléments de l'ensemble des nombres réels.

B) Faux, l'ensemble des nombres irrationnels est formé des nombres réels qui ne sont pas rationnels. Or, tout nombre qui possède un développement *décimal fini* ou bien un développement *décimal infini périodique* s'exprime comme le quotient de deux nombres entiers et est donc un nombre rationnel.

Quelques détails supplémentaires concernant les ensembles de nombres

L'ensemble des **nombres réels**, $\mathbb{R}$, est formé de tous les nombres qui ont une représentation décimale. Celui-ci est le plus utilisé en mathématiques et en sciences. Nous nous intéressons ici à quelques-uns de ses sous-ensembles.

L'ensemble des **nombres naturels**, que l'on désigne par $\mathbb{N}$, est formé des nombres qui servent à compter,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}.$$

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}.$$

L'ensemble des **nombres entiers** $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est une extension de l'ensemble des naturels, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Pour désigner l'ensemble des entiers non nuls, on utilise $\mathbb{Z}^*$ comme on le fait pour les naturels non nuls.

L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est défini comme l'ensemble de tous les quotients de nombres entiers dont le dénominateur est différent de 0, c'est-à-dire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Cet ensemble contient tous les nombres réels qui ont une représentation décimale finie ou infinie périodique. En effet, tout réel de représentation décimale finie s'écrit comme une fraction. Par exemple, $1{,}032 = \frac{1032}{1000}$. De même, tout réel ayant une représentation décimale infinie périodique possède une représentation fractionnaire et est donc rationnel. Par exemple, trouvons une représentation fractionnaire du nombre $7{,}05454\ldots = 7{,}0\overline{54}$. Notons d'abord que la barre horizontale au dessus de 54 indique que 54 est la période et celle-ci est répétée à l'infini. Posons $X = 7{,}0\overline{54}$. On élimine la période en multipliant X d'abord par 10, ensuite par 1000 et en soustayant le premier résultat du second. On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
X = 7{,}0\overline{54} \quad &\Leftrightarrow \quad 10X = 70{,}54545454\overline{54} \\
&\Leftrightarrow \quad 1000X = 7054{,}5454\overline{54} \\
&\Leftrightarrow \quad 1000X - 10X = 990X = 6984 \\
&\Leftrightarrow \quad X = \frac{6984}{990}
\end{aligned}$$

L'ensemble des **nombres irrationnels**, $\mathbb{I}$, est formé de tous les nombres réels dont la représentation décimale est infinie mais non périodique. En fait, $\mathbb{I} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ est formé de tous les réels sauf les rationnels ($\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est la notation ensembliste de soustraction). Par exemple, les nombres $\pi = 3{,}141592\cdots$ et $\sqrt{2} = 1{,}41421\cdots$ sont des irrationnels. Le nombre π représente, entre autres, la mesure de la surface d'un cercle de rayon 1 et le nombre $\sqrt{2}$ représente, entre autres, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle isocèle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit sont de longueur 1.

n° 24 Pour simplifier l'expression $5(x+h)^2 - 7(x+h) - \left(5x^2 - 7x\right)$, on développe le carré $(x+h)^2$, on distribue les constantes sur les différentes parenthèses et on termine en regroupant les termes semblables.

$$\begin{aligned}
5(x+h)^2 - 7(x+h) - \left(5x^2 - 7x\right) &= 5\left(x^2 + 2xh + h^2\right) - 7(x+h) - \left(5x^2 - 7x\right) \\
&= 5x^2 + 10xh + 5h^2 - 7x - 7h - 5x^2 + 7x \\
&= 10xh + 5h^2 - 7h
\end{aligned}$$

n° 25 Pour simplifier une expression telle que $-2x\left\{\left(x^2+2\right)(x-3) - x\left[x - x(3-x)\right]\right\}$ on doit effectuer les opérations les plus imbriquées d'abord et regrouper les termes semblables au fur et à mesure qu'on les rencontre.

$$\begin{aligned}
-2x\left\{\left(x^2+2\right)(x-3) - x\left[x - x(3-x)\right]\right\} &= -2x\left\{\left(x^2+2\right)(x-3) - x\left[x - 3x + x^2\right]\right\} \\
&= -2x\left\{x^2(x-3) + 2(x-3) - x\left[-2x + x^2\right]\right\} \\
&= -2x\left\{x^3 - 3x^2 + 2x - 6 + 2x^2 - x^3\right\} \\
&= -2x\left\{-x^2 + 2x - 6\right\} \\
&= 2x^3 - 4x^2 + 12x
\end{aligned}$$

n° 47 Pour simplifier l'expression $\left(2\sqrt{x} - 5\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ on utilise la notation en terme des exposants fractionnaires, on effectue la multiplication et on utilise les propriétés des exposants.

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt{x} - 5\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) &= \left(2x^{1/2} - 5y^{1/2}\right)\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right) \\
&= 2x^{1/2}\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right) - 5y^{1/2}\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right) \\
&= 2x^{1/2}x^{1/2} + 2x^{1/2}y^{1/2} - 5y^{1/2}x^{1/2} - 5y^{1/2}y^{1/2} \\
&= 2x^{1/2+1/2} + 2x^{1/2}y^{1/2} - 5x^{1/2}y^{1/2} - 5y^{1/2+1/2} \\
&= 2x - 3x^{1/2}y^{1/2} - 5y \\
&= 2x - 3\sqrt{xy} - 5y
\end{aligned}$$

n°48 Posons $X = 0,\overline{54}$. On élimine la période en multipliant X par 100 et en soustayant X du résultat. On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
X = 0,\overline{54} \quad &\Leftrightarrow \quad 100\ X = 54,5454545454\overline{54} \\
&\Leftrightarrow \quad 100X - X = 99\ X = 54 \\
&\Leftrightarrow \quad X = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}
\end{aligned}$$