Annexe C : Matrices, déterminants et systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires

Un système de 2 équations linéaires à 2 variables est un système de la forme : $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = k_2 \end{cases}$. La méthode qu'on utilise généralement pour résoudre un tel système est appelée la méthode d'élimination-substitution. Elle consiste à isoler une des deux variables (x_1 ou x_2), puis à substituer sa valeur dans l'autre équation; il suffit de résoudre cette nouvelle équation, plus simple puisqu'elle ne contient qu'une seule variable. Illustrons la méthode à l'aide d'un exemple.

Exemple C.1 Soit à résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$

Isolons d'abord x dans la première équation : $x = \dfrac{4 + 2y}{3}$.

Substituons cette valeur dans la deuxième équation : $5\dfrac{4 + 2y}{3} + 7y = -2$.

On a obtenu une équation à une seule inconnue, qu'on peut résoudre facilement en isolant y : $y = \dfrac{-26}{31}$.

Et, puisque $x = \dfrac{4 + 2y}{3}$, on obtient $x = \dfrac{24}{31}$.

La solution de ce système est : $x = \dfrac{24}{31}$ et $y = \dfrac{-26}{31}$

Remarque: nous ne considérons dans cette annexe que les systèmes qui ont une solution. Par exemple si l'on a un système avec deux inconnues, on doit avoir deux informations (équations) indépendantes pour obtenir une solution unique du système. Si on essaie de résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -8 \end{cases}$ on n'a pas 2 équations indépendantes car la deuxième vaut -2 fois la première.

Un système de 3 équations linéaires à 3 variables est un système de la forme : $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = k_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases}$.

On peut également utiliser la méthode d'élimination-substitution pour résoudre ces systèmes. C'est un petit peu plus lourd car c'est plus long, mais ça fonctionne bien quand même, comme on le verra dans l'exemple suivant.

Exemple C.2 Résolvons le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - 3z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

Isolons x dans la troisième équation : $x = 6 - y + z$.

On substitue cette valeur dans les deux premières équations, ce qui nous donne un système de 2 équations à 2 inconnues, en y et z : $\begin{cases} -5y + 7z = -25 \\ 2y + 2z = -14 \end{cases}$

Isolons y dans cette deuxième équation : $y = -7 - z$.

En substituant cette valeur, ça nous donne que $z = -5$. Puis $y = -2$.
Et finalement $x = 3$.

La solution du système est donc : $x = 3$, $y = -2$ et $z = -5$.

Une autre façon qui peut être utilisée pour résoudre ces systèmes d'équations, et même d'autres plus gros, est basée sur l'écriture sous forme matricielle des systèmes.

Matrices

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres. On entoure généralement ces tableaux de parenthèses ou de crochets. Pour nommer les matrices, on utilise des lettres majuscules.
Si la matrice A est composée de l lignes et de c colonnes, on dit qu'elle est $l \times c$, ou que son format est $l \times c$.

Exemples C.3 a) La matrice $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2.

Pour exprimer le système d'équations $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = k_2 \end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $A \cdot X = K$, où $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est la matrice des variables et $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ est la matrice des constantes. Dans le cas de X et de K, qui n'ont qu'une seule colonne, on parle indifféremment de matrice ou de vecteur.

b) La matrice $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×3.

Pour exprimer le système d'équations $\begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = h_1 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = h_2 \\ c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = h_3 \end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $B \cdot Y = H$, où $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des variables et $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des constantes.

C'est important de pouvoir exprimer un système d'équations sous forme matricielle pour plusieurs raisons. Premièrement, les calculatrices qui résolvent ce genre de problème demandent souvent qu'on leur donne les coefficients sous forme matricielle. De plus, nous allons vous montrer une méthode de résolution qui fait appel à cette notation : c'est la méthode de Cramer.

Il faut être prudent lorsqu'on traduit un système d'équations sous forme matricielle. On doit bien respecter l'ordre d'apparition des coefficients et des variables. Soit le système: $\begin{cases} 3u - 2w + 4v = -7 \\ 5v - 3w = 16 \\ w + 2u = 6 \end{cases}$

sa traduction sous forme matricielle sera: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$

Déterminants

Mais avant de vraiment vous donner la règle de Cramer, il faut encore définir une opération sur les matrices : prendre le **déterminant** d'une matrice. Remarquez qu'on ne prend le déterminant que des matrices carrées (qui ont le même nombre de lignes que de colonnes).

Le déterminant d'une matrice d'ordre 2 (c'est-à-dire de format 2×2) se calcule ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Le déterminant d'une matrice d'ordre 3 (c'est-à-dire 3×3) se calcule ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Remarque : les déterminants d'ordre 2 qui précèdent s'obtiennent en éliminant la ligne et la colonne contenant le coefficient a_i. Cette technique de calcul se nomme le développement selon la 1ère ligne. Il existe d'autres techniques de calcul; on pourrait par exemple développer le déterminant selon la deuxième ligne, ou selon la troisième colonne. Mais nous nous en tiendrons à cette seule technique, qui est tout à fait suffisante pour nos besoins.

exemple C.4 a) Le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, qu'on note $\det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, ou bien $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, est $3\cdot 1 - [-2\cdot 4] = 3 - (-8) = 11$.

b) Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot[1+3] - [2+15] + 0 = 16 - 17 = -1.$$

Revenons à nos systèmes d'équations. Considérons $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = k_2 \end{cases}$: $A\cdot X = K$.

Nous noterons A_i la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i$^{\text{ème}}$ colonne par la matrice des constantes.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} k_1 & a_2 \\ k_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & k_1 \\ b_1 & k_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}$$

Exemple C.5 Avec la méthode de Cramer, résoudre $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ça nous donnera $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{28 - 4}{21 - (-10)} = \frac{24}{31}$$

et $$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - 20}{21 - (-10)} = \frac{-26}{31}$$

Nous aurons un résultat semblable dans un système de 3 équations et 3 inconnues comme

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = k_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases} : \mathrm{A\cdot X = K} \text{ où } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Nous noterons B_i la matrice B des coefficients dans laquelle on a remplacé la i$^{\text{ème}}$ colonne par la matrice des constantes.

La solution sera donnée par :

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_2 & a_3 \\ k_2 & b_2 & b_3 \\ k_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & a_3 \\ b_1 & k_2 & b_3 \\ c_1 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k_1 \\ b_1 & b_2 & k_2 \\ c_1 & c_2 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Exemple C.6 Résoudre $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - 3z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ avec la méthode de Cramer.

Identifions d'abord la matrice des coefficients : $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et la matrice des constantes : $K = \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$

Nous obtenons : $B_1 = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 16 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 5 & 16 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 5 & 7 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 16 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7[-7-(-3)] - (-2)[-16-(-18)] + 4[16-42]}{3[-7-(-3)] - (-2)[-5-(-3)] + 4[5-7]} = \frac{-72}{-24} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 5 & 16 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3[-16+18] + 7[-5+3] + 4[30-16]}{3[-7+3] + 2[-5+3] + 4[5-7]} = \frac{48}{-24} = -2$$

et $$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 5 & 7 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3[42-16] + 2[30-16] - 7[5-7]}{-24} = \frac{120}{-24} = -5.$$

Il est clair que résoudre "à la main" un système d'équations avec plus de trois variables peut être assez difficile sans compter les erreurs de calcul possibles. Par contre, il arrive qu'on ait à résoudre un système composé de deux sous-systèmes indépendant qui peuvent se résoudre rapidement.

Par exemple résoudre $\begin{cases} 4A - 2C = 3 \\ 3B + 2D = 0 \\ -9A - C = 7 \\ D - B = 2 \end{cases}$ revient à résoudre les deux systèmes

$\begin{cases} 4A - 2C = 3 \\ -9A - C = 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3B + 2D = 0 \\ -B + D = 2 \end{cases}$

Vous pouvez le résoudre : la réponse est $A = \frac{-1}{2}$, $C = \frac{-5}{2}$, $B = \frac{-4}{5}$, $D = \frac{6}{5}$.

EXERCICES

1- Calculez les déterminants des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2- Résolvez les systèmes suivants, d'abord en employant une méthode algébrique (élimination-substitution ou réduction), puis avec la méthode de Cramer.

a) $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2y - 3x = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 5y - 3x = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 8y = -5 \\ -2x + 5y = \frac{5}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x - 4z = -1 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u + v + w = 1 \\ 2u - v - w = 5 \\ -u + 2v - 3w = -4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ 3x - y + 2z = 10 \\ 5x + 4y - z = 1 \end{cases}$

Réponses :

1-a) -1

b) 4

c) 31

d) 28

e) 22

f) 7

2-a) $x = 1/2$, $y = -5/2$

b) $x = 1$, $y = 3$

c) $x = 1/9$, $y = -1/3$

d) $x = -5/4$, $y = 0$

e) $x = -13$, $y = -21$

f) $x = -3$, $y = 1$, $z = -2$

g) $u = 2$, $v = -1$, $w = 0$

h) $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$