CHAPITRE 3 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

3-1 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS LINÉAIRES

On pourrait définir une **équation** comme étant un énoncé constitué d'un signe égal (=) compris entre deux expressions algébriques. Une **solution** ou **racine** d'une équation est un nombre élément du **domaine** ou de l'**ensemble de référence** de la variable qui, lorsque substitué à la variable, transforme l'équation en un énoncé vrai. Une équation devient une **identité** si elle est vraie pour toutes les valeurs du domaine et elle devient une **équation conditionnelle** si elle est vraie pour certaines valeurs du domaine et fausse pour d'autres. Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même **ensemble solution**. On utilise les **propriétés de l'égalité** pour résoudre les équations:

1.	Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.	Propriété d'addition
2.	Si $a = b$, alors $a - c = b - c$.	Propriété de soustraction
3.	Si $a = b$, alors $ca = cb, c \neq 0$	Propriété de multiplication
4.	Si $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$	Propriété de division
5.	Si $a = b$, alors un peut substituer l'un à l'autre dans tout énoncé sans affecter le caractère vrai ou faux de l'énoncé.	Propriété de substitution

Une équation qui peut être écrite sous la **forme standard** $ax + b = 0$, $a \neq 0$, est dite **équation linéaire** ou **équation de degré un**.

Exemple 3-1.1 a) Résoudre: $4x - 3 = 2x + 6$

En soustrayant $2x$ et additionnant 3: $4x - 2x = 6 + 3$ $\quad 2x = 9 \quad x = \frac{9}{2}$

b) Résoudre: $\frac{2x+5}{4x-7} = \frac{x+3}{2x+1}$, avec $x \neq \frac{7}{4}$ et $x \neq \frac{-1}{2}$

En multipliant par $(4x - 7)$ et par $(2x + 1)$: $(2x + 5)(2x + 1) = (x + 3)(4x - 7)$

$4x^2 + 12x + 5 = 4x^2 + 5x - 21 \qquad 12x + 5 = 5x - 21 \qquad 12x - 5x = -21 - 5$

$7x = -26 \qquad x = -\frac{26}{7}.$

Les symboles d'inégalité <, >, ≤, ≥ sont utilisés pour former des **relations d'inégalités**. Les **graphes sur une droite**, les **intervalles**, et les opérations ensemblistes d'**union** et d'**intersection** servent à décrire les relations d'inégalités. Une **solution** d'une inéquation linéaire à une variable est une valeur de la variable qui transforme l'inégalité en un énoncé vrai. Deux inéquations sont dites **équivalentes** si elles possèdent le même **ensemble solution**. On utilise les **propriétés des inégalités** pour résoudre les inéquations:

1.	Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.	Propriété de transitivité
2.	Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.	Propriété de l'addition
3.	Si $a < b$, alors $a - c < b - c$.	Propriété de soustraction
4.	Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ca < cb$.	Propriété de multiplication
5.	Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ca > cb$.	Propriété de multiplication
6.	Si $a < b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	Propriété de division
7.	Si $a < b$ et $c < 0$, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	Propriété de division

À retenir: *l'ordre d'une inégalité est inversé si chaque côté de l'inégalité est multiplié par un nombre négatif.*

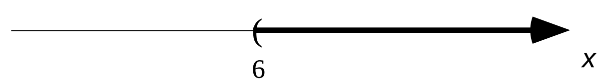
Exemple 3-1.2 Solutionnez et faites le graphique: $\frac{4x-3}{3} + 8 < 6 + \frac{3x}{2}$

Par applications des propriétés, on obtient la suite des équivalences

$$\frac{4x+21}{3} < \frac{12+3x}{2}$$
$$8x + 42 < 9x + 36$$
$$-x < -6$$

Finalement , $x > 6$

Ce qui donne le graphe:



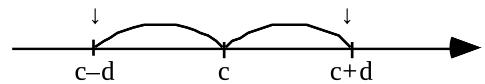
3-2 *LA VALEUR ABSOLUE*

La **valeur absolue** d'un nombre x est la distance sur la droite réelle entre l'origine et le point de coordonnée x et est définie par:

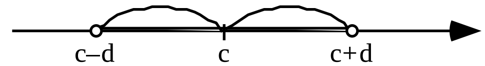
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La **distance entre les points *A* et *B*** de coordonnées a et b, est $d(A,B) = |b - a|$, et elle possède les **interprétations géométriques** suivantes:

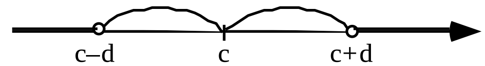
$|x-c| = d$ La distance entre x et c est égale à d.



$|x-c| < d$ La distance entre x et c est inférieure à d.



$|x-c| > d$ La distance entre x et c est supérieure à d.



Les équations et inéquations comportants des valeurs absolues sont résolues à l'aide des règles suivantes où $p > 0$ et A représente une variable ou une expression algébrique quelconque:

1. $|A| = p$ est équivalent à $A = p$ ou $A = -p$.
2. $|A| < p$ est équivalent à $-p < A < p$.
3. $|A| > p$ est équivalent à $A < -p$ ou $A > p$.

Nous vous rappelons que pour tout nombre réel x, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple 3-2.1 Solutionnez $|3x-4| = x+5$.

Puisqu'on ne connaît pas à priori le signe de l'expression $3x+4$ on doit procéder en deux cas:

<u>cas 1</u>. $\left(3x-4 \geq 0 \text{, i.e. } x \geq \frac{4}{3}\right)$

Dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} |3x-4| &= x+5 \\ 3x-4 &= x+5 \\ 2x &= 9 \\ x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

qui est une solution acceptable car $\frac{9}{2} \geq \frac{4}{3}$.

<u>cas 2</u>. $\left(3x-4 < 0 \text{, i.e. } x < \frac{4}{3}\right)$

Dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} |3x-4| &= x+5 \\ -(3x-4) &= x+5 \\ -4x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

qui est également une solution car $-\frac{1}{4} < \frac{4}{3}$.

La solution générale est donc $x = \frac{9}{2}$ ou $x = -\frac{1}{4}$.

3-3 LES NOMBRES COMPLEXES

On peut quelquefois rencontrer des équations qui ne possèdent pas de solutions réelles. C'est le cas, par exemple, de l'équation $x^2 + 25 = 0$. Les solutions de cette équation, $\pm 5i$, font partie d'un ensemble de nombres qu'on appelle les nombres complexes (noté $\mathbb{C}$); cet ensemble est formé à partir des nombres réels auxquels on ajoute $i = \sqrt{-1}$.

En électronique, la lettre i étant utilisée pour désigner l'intensité du courant, c'est la lettre j qui sert pour le nombre $\sqrt{-1}$. Ici, on se servira de i.

Un nombre complexe sous **forme standard** est un nombre de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i est l'unité des nombres imaginaires. Si $b \neq 0$, alors $a + bi$ est aussi appelé **nombre imaginaire**. Si $b = 0$, alors $a + 0i$ est un **nombre réel**. Le **zéro** des complexes est $0 + 0i = 0$. Le **conjugué** de $a + bi$ est $a - bi$.

L'**égalité, l'addition et la multiplication** des nombres complexes est définie par:

1. $a + bi = c + di$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$
2. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Puisque les nombres complexes jouissent des mêmes propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité que les nombres réels, la plupart des calculs sur les nombres complexes sont effectués à l'aide de ces dernières propriétés et aussi de la formule $\boldsymbol{i^2 = -1}$. La recherche de l'**inverse multiplicatif** d'un nombre complexe et la manipulation de **quotients** amènent à utiliser la **propriété des conjugués**:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Si $a > 0$, alors la **racine carrée principale d'un réel négatif** $-a$ est $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$.

Exemple 3-3.1 Effectuez les opérations suivantes

(A) $(2 - 5i) + (3 + i)$ (B) $(4 - 3i)\cdot(1 - 2i)$ (C) $\dfrac{1}{2 + 3i}$ (D) $\dfrac{7 - 3i}{1 + i}$

Solutions: (A) En suivant la règle #2 ci-dessus:

$(2 - 5i) + (3 + i) = (2 + 3) + (-5 + 1)i = 5 - 4i$

(B) En suivant la règle #3 ci-dessus:

$(4 - 3i)\cdot(1 - 2i) = (4\cdot 1 - [-3]\cdot[-2]) + (4\cdot[-2] + [-3]\cdot 1)i = (4 - 6) + (-8 - 3)i = -2 - 11i$

(C) Pour ramener cette expression sous forme standard il suffit d'utiliser le conjugué du dénominateur:

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i}\,\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

(D) On procède comme pour l'expression précédente:

$$\frac{7-3i}{1+i} = \frac{7-3i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

Exemple 3-3.2 Évaluez $\sqrt{i}$.

Pour résoudre un tel problème on suppose que la solution existe, c'est à dire que l'on peut trouver deux nombre réels a et b tels que $\sqrt{i} = a+bi$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= a+bi \\ i &= (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+(2ab)i \end{aligned}$$

De ceci on obtient le système

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= 1 \end{aligned}$$

De la première équation on tire $a = \pm b$, mais la deuxième force l'égalité des signes, donc $a = b$. Il s'ensuit que $2ab = 2a^2 = 1$ et que $a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il y a doncdeux solution, i.e.

$$\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

3-4 *EXERCICES*

Solutionnez les problèmes 1 et 2

1. $0{,}05x + 0{,}25(30-x) = 3{,}3$

***2.** $\frac{5x}{3} - \frac{4+x}{2} = \frac{x-2}{4} + 1$

Solutionnez et faites le graphique des problèmes 3-5

3. $3(2-x)-2 \le -1$

***4.** $|y+9| < 5$

5. $|3-2x| \le 5$

6. Effectuez et donnez sous forme standard

(A) $(-3+2i)+(6-8i)$

(B) $(-3-3i)(2+3i)$

(C) $\frac{13-i}{5-3i}$

***7.** Pour quelles valeurs de x est-ce que $\sqrt{3-5x}$ représente un nombre réel ?

Solutionnez les problèmes 8 et 9

***8.** $\frac{7}{2-x} = \frac{10-4x}{x^2+3x-10}$

9. $\frac{u-3}{2u-2} = \frac{1}{6} - \frac{1-u}{3u-3}$

Solutionnez et faites le graphique des problèmes 10-14

10. $\frac{x+3}{8} \le 5 - \frac{2-x}{3}$

***11.** $|3x-8| > 2$

12. $\frac{1}{x} < 2$

13. $|x-a| = 4$

14. $\sqrt{(1-2m)^2} \le 3$ Rappel: $\sqrt{u^2} = |u|$

***15.** Pour quelles valeurs de x est-ce que l'expression ci-dessous représente un nombre réel ?

$$\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}$$

16. Si la coordonnés de A est –8 et la coordonnée de B est −2, trouvez

(A) d(A,B)

(B) d(B,A)

17. Effectuez et écrivez sous forme standard

(A) $(3+i)^2 - 2(3+i) + 3$

(B) i^{27}

18. Réécrivez sous la forme $a+bi$ et effectuez

(A) $(2-\sqrt{-4} - (3-\sqrt{-9})$

(B) $\frac{2-\sqrt{-1}}{3+\sqrt{-4}}$

(C) $\frac{4+\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$

Utilisez une calculatrice pour résoudre à deux décimales près les problèmes 19-21

19. $2{,}15x - 3{,}73(x-0{,}93) = 6{,}11x$

20. $-1{,}52 \le 0{,}77 - 2{,}04x \le 5{,}33$

21. $\frac{3{,}77-8{,}47i}{6{,}82-7{,}06i}$

22. Pour quelles valeurs de a et b est-ce que $a+b < b-a$ est valide ?

***23.** Si a et b sont deux nombres négatifs tels que a > b, est-ce que a/b est plus grand ou plus petit que 1 ?

24. Solutionnez pour x en termes de y l'équation:

$$y = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$$

25. Solutionnez et faites le graphique de $0 < |x-6| < d$

26. Évaluez $(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)$ $a,\ b \neq 0$

27. On trouve la citation suivante dans une brochure sur la médecine sportive: "L'idée est de faire monter votre rythme cardiaque et de le maintenir à 70% de son rythme maximal sécuritaire (celui-ci dépend de votre âge). Une façon simple de calculer ce rythme est de soustraire votre âge de 220 et de multiplier le résultat par 0,7."

a) Si C est le rythme cardiaque maximal sécuritaire (en battements par minute) pour une personne d'âge A (en années), écrivez une formule reliant les deux quantité C et A.

b) Quel est le rythme maximal sécuritaire pour une personne de 20 ans ?

c) Quel est l'âge d'une personne ayant un rythme maximal sécuritaire de 126?

***28.** Vous avez en votre possession une solution d'alcool à 80% et une autre à 30%. Combien de millilitres de chacune devez-vous utiliser pour obtenir 50 millilitres à 60% ?

29. Si la température T d'une solution doit être maintenue à $110°C$ plus ou moins $5°C$, exprimez cette restriction à l'aide d'une inégalité en valeur absolue.

3-5 *LES ÉQUATIONS QUADRATIQUES*

Une **équation quadratique** sous **forme standard** est une équation qui peut être ramenée sous la forme

$$ax^2+bx+c=0 \quad a \neq 0$$

où x est la variable et a, b et c sont des constantes. Parmi les méthodes de solution nous retrouvons:

1. La **factorisation** et la **propriété du zéro**:

$$m \cdot n = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad m = 0 \text{ ou } n = 0 \text{ (ou les deux)}$$

2. La **propriété de la racine carrée**:

$$\text{Si } A^2 = C, \text{ alors } A = \pm\sqrt{C}$$

3. La **complétion du carré**:

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

4. La **formule quadratique**:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

On dit qu'on **complète le carré** d'une expression $x^2 + bx$ quand on veut l'exprimer comme $(x+\alpha)^2 + \beta$. Pour trouver la valeur de α, on effectue $(x+\alpha)^2 + \beta = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta = x^2 + bx$. Les coefficients de x devant être égaux, on obtient $b = 2\alpha \quad \alpha = \frac{b}{2}$. Ce qui nous donne, les termes constants devant être égaux, $\alpha^2 + \beta = 0 \quad \beta = -\alpha^2$.

Exemple 3-5.1 Résoudre $x^2 - 6x = 0$ par la méthode de complétion du carré.

On a $b = -6 \quad \alpha = -3$ et $\beta = -9$.

Donc $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

$(x-3)^2 - 9 = 0 \quad (x-3)^2 = 9 \quad x - 3 = \pm 3 \quad x = 3 \pm 3$

$x = 6$ ou $x = 0$.

Si le **discriminant** $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ est positif, l'équation possède deux **racines réelles** distinctes; si le discriminant est égal à 0, l'équation possède une **racine réelle double**; si le discriminant est négatif, l'équation possède deux **racines imaginaires**, chacune étant la conjuguée de l'autre.

Exemple 3-5.2 Trouver combien de racines possède chacune des équations suivantes:

(A) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (B) $9x^2 + 30x + 25 = 0$ (C) $5x^2 + 4x + 1 = 0$

(A) $a = 2$; $b = -5$; $c = 3 \quad b^2 - 4ac = 25 - 4{\cdot}6 = 1 > 0$ 2 racines réelles distinctes: 1 et $\frac{3}{2}$

(B) $a = 9$; $b = 30$; $c = 25 \quad b^2 - 4ac = 900 - 4{\cdot}225 = 0$ une seule racine, double: $\frac{-5}{3}$

(C) $a = 5$; $b = 4$; $c = 1 \quad b^2 - 4ac = 16 - 4{\cdot}5 = -4 < 0$ 2 racines complexes: $\frac{-2}{5} \pm \frac{i}{5}$

Exemple 3-5.3 Trouvez les valeurs de α telles que l'équation $2x^2 + \alpha x + 5 = 0$ possède

(A) 2 solutions réelles (B) une seule solution (C) 2 solutions complexes

On applique la formule quadratique, les solutions sont de la forme

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 40}}{4}$$

L'étude du discriminant nous donne les solutions cherchées:

(A) Si $\alpha^2 - 40 > 0$ alors $\alpha^2 > 40$ i.e. $\alpha > 2\sqrt{10}$ ou $\alpha < -2\sqrt{10}$ et on a deux racines réelles distinctes.

(B) Si $\alpha^2 - 40 = 0$ alors $\alpha^2 = 40$ i.e. $\alpha = \pm 2\sqrt{10}$ et on a une seule racine double.

(C) Si $\alpha^2 - 40 < 0$ alors $\alpha^2 < 40$ i.e. $-2\sqrt{10} < \alpha < 2\sqrt{10}$ et on a deux racines complexes conjuguées.

3-6 APPLICATIONS

Les étapes de résolution d'un problème narratif

1. Lisez attentivement le problème, au besoin, le lire plusieurs fois jusqu'à ce que vous saisissiez bien ce qui est demandé et que vous ayez identifié les informations qui sont données.
2. Représentez une des quantités inconnues par une variable, disons x, et traduisez toutes les autres quantités en fonction de x. Cette étape importante doit être faite avec minutie.
3. Si la situation s'y prête, faites un diagramme ou une figure, en identifiant clairement les quantités connues et les quantités inconnues.
4. Recherchez des formules possibles reliant les quantités connues et les quantités inconnues.
5. Formez une équation incluant les quantités connues et les quantités inconnues.
6. Résolvez l'équation et donnez la réponse à toutes les questions posées dans le problème.
7. Vérifiez et interprétez les solutions dans le contexte du problème original (pas seulement dans l'équation trouvée à l'étape 5), ceci afin de prévenir une erreur qui aurait pu se glisser dans la construction de l'équation à l'étape 5.

Si Q représente une **quantité** produite ou une **distance** parcourue à un **taux** moyen ou uniforme R en T unités de **temps**, alors les **formules de quantité-taux-temps** sont:

$$R = \frac{Q}{T} \qquad Q = RT \qquad T = \frac{Q}{R}$$

Exemple 3-6.1 Deux pompes sont utilisées pour remplir un réservoir. La première, si elle est utilisée seule, met 9 heures à remplir le réservoir, la seconde en met 6. Combien de temps mettront les deux pompes à remplir le réservoir si elles sont utilisées en même temps ?

Posons d'abord x = le temps requis aux deux pompes pour remplir le réservoir. On sait qu'en 1 heure la première pompe rempli le $1/9$ du réservoir et que la deuxième rempli le $1/6$ du réservoir. Elles remplissent donc à eux deux, en une heure, le $1/9 + 1/6$

du réservoir. En x heures elles remplissent la totalité du réservoir, ce qui donne l'équation $\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)x = 1$, i.e. $x = \frac{18}{5}$ heures = 3 heures 36 minutes.

3-7 LES ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES À UNE FORME QUADRATIQUE

Il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations comme, par exemple, $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$. On n'a pas encore vu de méthodes pour résoudre ce type d'équations; c'est ce que nous verrons dans cette section. Nous allons effectuer un **changement de variable**: $u = x^2$ ($x^4 = u^2$), qui va réduire l'équation donnée en une équation quadratique.

Une **racine carrée** peut être éliminée d'une équation en isolant le radical d'un côté de l'équation et en élevant au carré chaque côté de l'équation. La nouvelle équation formée en élevant au carré les deux côtés peut posséder des **solutions exogènes** (non valides). En conséquence, **toute solution de la nouvelle équation doit être introduite dans l'équation originale afin d'éliminer toute solution exogène**. Si une équation contient plus d'un radical, le processus qui consiste à isoler le radical et à mettre au carré les deux membres de l'équation peut être répété jusqu'à l'élimination de tous les radicaux. Si une substitution transforme une équation sous la forme $au^2 + bu + c = 0$, où u est une expression fonction d'une autre variable, alors l'équation est une **forme quadratique** qui peut se résoudre par la méthode quadratique.

Exemple 3-7.1 Trouvez toutes les racines de

(A) $4x^{-2} = 2 + x^{-4}$ (B) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$

(A) Pour résoudre on ramène l'équation sous forme polynomiale

$$\begin{aligned} 4x^{-2} &= 2 + x^{-4} \\ \frac{4}{x^2} &= 2 + \frac{1}{x^4} \\ \frac{4x^2}{x^4} &= \frac{2x^4+1}{x^4} \\ 4x^2 &= 2x^4 + 1 \end{aligned}$$

Ce qui donne $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$. On trouve les quatre racines en substituant $u = x^2$:

$2u^2 - 4u + 1 = 0$ $\quad u = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = x^2$

Donc $x = \pm\sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(B) On ramène l'équation sous forme polynomiale en élevant au carré deux fois:

1° $2x + 3 - 2\cdot\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2} + x - 2 = x + 1$

$3x + 1 - (x + 1) = 2\cdot\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2}$

$2x = 2\cdot\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2}$

2° $4x^2 = 4\cdot(2x + 3)\cdot(x - 2) = 4\cdot(2x^2 - x - 6)$

$4x^2 - 4x - 24 = 0 \qquad x^2 - x - 6 = 0$

$x = -2$ ou $x = 3$

Il faut maintenant remettre ces 2 solutions dans l'équation initiale:

$x = -2$: $\sqrt{2\cdot(-2) + 3} - \sqrt{-2-2} \overset{?}{=} \sqrt{-2+1}$? NON: ça introduit des nombres complexes

$x = 3$: $\sqrt{2\cdot 3 + 3} - \sqrt{3-2} \overset{?}{=} \sqrt{3+1}$? OUI: $3 - 1 = 2$.

Donc $x = 3$ est la seule solution de l'équation.

3-8 LES INÉQUATIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Une inéquation est dite sous **forme standard** si le membre de droite est 0. Si le membre de gauche est un **polynôme**, alors les **racines réelles** de ce polynôme divisent la droite réelle en intervalles et on a alors la propriété suivante: le signe du polynôme est constant sur chaque intervalle. En **choisissant un nombre** dans chaque intervalle et en formant un **tableau de signes** on obtient la solution à l'inéquation. Si le membre de gauche de l'inéquation est une expression **rationnelle** de la forme P/Q, où P et Q sont des polynômes, alors les racines réelles de chacun des polynômes divisent la droite réelle en intervalles et on a alors la propriété suivante: le signe de P/Q est constant sur chaque intervalle. Puisque la **division par zéro** n'est jamais permise, les racines réelles de Q sont exclues de l'ensemble solution.

Exemple 3-8.1 Résoudre: $P(x) = (x - 5)\cdot(2x + 3)\cdot(x + 4) \le 0$

Les racines sont $-4, \frac{-3}{2}$ et 5.

	$-\infty<x<-4$	$x=-4$	$-4<x<-1{,}5$	$x=-1{,}5$	$-1{,}5<x<5$	$x=5$	$5<x<\infty$
$x+4$	–	0	+	+	+	+	+
$2x+3$	–	–	–	0	+	+	+
$x-5$	–	–	–	–	–	0	+
$P(x)$	–	0	+	0	–	0	+

On a donc obtenu que $P(x) < 0$ si $x < -4$ et $-1{,}5 < x < 5$ et que $P(x) = 0$ si $x = -4$, $x = -1{,}5$ et $x = 5$

$(x - 5)\cdot(2x + 3)\cdot(x + 4) \le 0$ si $x \le -4$ et $-1{,}5 \le x \le 5$.

Exemple 3-8.2 Résoudre: $P(x) = \dfrac{(2x+1)\cdot(x-4)}{2x} > 0$

Les racines sont $\dfrac{-1}{2}$ et 4. De plus, $P(x)$ n'est pas définie si $x = 0$.

	$-\infty<x<-0,5$	$x=-0,5$	$-0,5<x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$4<x<\infty$
$2x+1$	–	0	+	+	+	+	+
$x-4$	–	–	–	–	–	0	+
$2x$	–	–	–	0	+	+	+
$P(x)$	–	0	+	N.D.	–	0	+

$\dfrac{(2x+1)\cdot(x-4)}{2x} > 0$ si $-0,5 < x < 0$ ou $4 < x < \infty$.

3-9 *EXERCICES*

Solutionnez les problèmes 1 à 8

1. $2x^2 - 7 = 0$ ***2.** $2x^2 = 4x$ **3.** $2x^2 = 7x - 3$

4. $m^2 + m + 1 = 0$ **5.** $y^2 = \frac{3}{2}(y+1)$ **6.** $\sqrt{5x-6} - x = 0$

***7.** $x^2 + x < 20$ **8.** $x^2 \geq 4x + 21$

Dans les problèmes 9-14 trouvez toutes les solutions possibles.

***9.** $\left(u + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ **10.** $1 + \frac{3}{u^2} = \frac{2}{u}$ **11.** $\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{2}{x-3} = 3$

***12.** $2x^{2/3} - 5x^{1/3} - 12 = 0$ **13.** $m^4 + 5m^2 - 36 = 0$ **14.** $\sqrt{y-2} - \sqrt{5y+1} = -3$

15. Utilisez une calculatrice pour résoudre à deux décimales: $6,09x^2 + 4,57x - 8,86 = 0$

Solutionnez les problèmes 16-18 en fonction de la variable donnée

16. $P = M - Mdt$ pour M **17.** $P = EI - RI^2$ pour I ***18.** $x = \dfrac{4y+5}{2y+1}$ pour y

Solutionnez les problèmes 19 et 20

19. $2x^2 = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$ **20.** $4 = 8x^{-2} + x^{-4}$

Solutionnez les problèmes 21 et 22

21. $2x > \frac{x^2}{5} + 5$ **22.** $\frac{x^2}{4} + 4 \geq 2x$

23. Trouvez un nombre tel que lui-même moins son inverse multiplicatif donne $\frac{16}{15}$.

***24.** Une excursion en bateau prend deux heures de plus à l'aller, pour parcourir 45 milles vers l'amont, qu'au retour. Si la vitesse du bateau en eau calme est de 12 milles à l'heure, quelle est la vitesse du courant ?

25. L'équation des coûts de production pour une compagnie est souvent une équation quadratique. Si l'équation des coûts de production pour une certaine compagnie est $C = x^2 - 10x + 31$, où C représente les coûts de la compagnie en milliers de dollars pour produire x milliers d'unité par semaine, trouvez

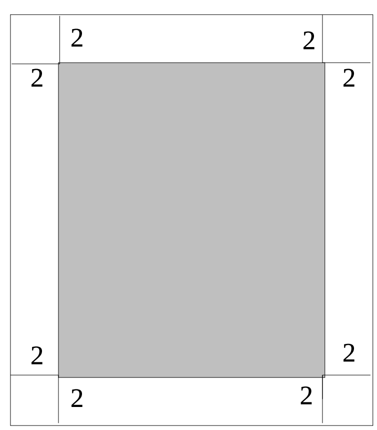
(A) le nombre d'unités si le coût de production est de $15,000 ($C$ = 15)

(B) le nombre d'unités si le cout de production est de $6,000 ($C$ = 6).

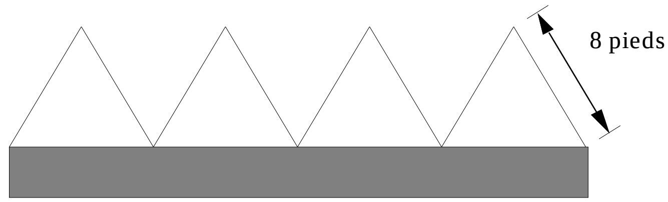
26. La compagnie du problème précédent vend des calculatrice au prix de gros $3 l'unité. L'équation de ses revenus est $R = 3x$ où R est le revenu en milliers de dollars et x est le nombre de milliers d'unités vendues par semaine. Trouvez le nombre de milliers d'unité que doit vendre la compagnie pour rentrer dans ses frais.

27. En vous référant aux deux problèmes précédents, trouvez l'intervalle de milliers d'unités pour lequel la compagnie enregistre des profits. i.e. $R > C$.

***28. Design** Les pages d'un livre ont des marges de largeur uniforme de 2 centimètres. Si la surface d'une page entière est de 480 centimètre carrés et que la surface de la partie écrite occupe 320 centimètres, trouvez les dimensions de la page.



29. Un paysagiste utilise des pièces de bois de 8 pieds pour construire une plate-bande formée de triangles isocèles. Si la surface de chacun des triangles est de 24 pieds carrés, trouvez la longueur de la base.



CHAPITRE 3 SECTION 3-4 - RÉPONSES

1. $x = 21$

2. $x = \frac{30}{11}$

3. $x \geq \frac{5}{3}$ ou $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$

4. $-14 < y < -4$ $(-14, -4)$

5. $-1 \leq x \leq 4$ $[-1,\ 4]$

6. (A) $3 - 6i$ (B) $3 - 15i$ (C) $2 + i$

7. $x \leq \frac{3}{5}$

8. $x = -15$

9. Aucune solution

10. $x \geq -19$ $[-19, \infty)$

11. $x < 2$ *ou* $x > \frac{10}{3}$

$(-\infty,\ 2)$ $\left(\frac{10}{3},\ \infty\right)$

12. $(-\infty,\ 0)$ *et* $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

$x < 0$ *ou* $x > \frac{1}{2}$

13. $x = a \pm 4$

14. $-1 \leq m \leq 2$ $[-1,\ 2]$

15. $[-4,\ 2)$. $-4 \leq x < 2$

16. (A) $d(A, B) = 6$

(B) $d(B, A) = 6$

17. (A) $5 + 4i$

(B) $i^{27} = i^{26} i = \left(i^2\right)^{13} i = (-1)^{13} i = (-1) i = -i$

18. (A) $-1 + i$

(B) $\frac{4}{13} - \frac{7}{13} i$

(C) $\frac{5}{2} - 2i$

19. $x = 0{,}45$

20. $-2{,}24 \le x \le 1{,}12$ *ou* $[-2{,}24,\ 1{,}12]$

21. $0{,}89 - 0{,}32i$

22. Il faut que $a < 0$.

23. $\frac{a}{b}$ est plus petit que 1.

24. $x = \frac{1}{1-y}$

25. $6 - d < x < 6$ *ou* $6 < x < 6 + d$
$(6-d,\ 6)$ $(6,\ 6+d)$

26. $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

27. (A) $H = 0{,}7(220 - A)$
(B) $H = 140$ pulsations / min
(C) $A = 40$ *ans*

28. 30 ml de la solution à 80 %
et
20 ml de la solution à 30 %

29. $|T - 110| \le 5$

SECTION 3-9 - RÉPONSES

1. $x = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

2. $x = 0,\ 2$

3. $x = \frac{1}{2},\ 3$

4. $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. $y = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$

6. $x = 2,\ 3$

7. $(-5,\ 4)$. $-5 < x < 4$.

8. $(-\infty,\ -3]$ ou $[-7,\ \infty)$

$x \le -3$ *ou* $x \ge 7$

9. $u = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$

10. $u = 1 \pm i\sqrt{2}$

11. $x = \frac{1 \pm \sqrt{43}}{3}$

12. $x = -\frac{27}{8},\ 64$

13. $m = \pm 3i,\ \pm 2$

14. $y = \frac{9}{4},\ 3$

15. $x = -1{,}64,\ 0{,}89$

16. $M = \frac{P}{1 - dt}$

17. $I = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4PR}}{2R}$

18. $y = \frac{5 - x}{2x - 4}$

19. $x = \dfrac{\sqrt{3} \pm i}{4}$ *ou* $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \pm \dfrac{1}{4} i$

20. $x = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}}$

(deux racines réelles)

21. Aucune solution

22. $x \in \mathbb{R}$

23. $x = -\dfrac{3}{5}, \ \dfrac{5}{3}$

24. Vitesse = 3 milles à l'heure

25. (A) 2 000 *ou* 8 000 *unités*

(B) 5 000 *unités*

26. $x = \dfrac{13 \pm \sqrt{45}}{2}$ milliers ou environ 3 146 et 9 854 unités

27. $3{,}146 < x < 9{,}854$, en milliers

28. 20 *cm par* 24 *cm*

29. $B = 14{,}58$ *pi ou* $6{,}58$ *pi*