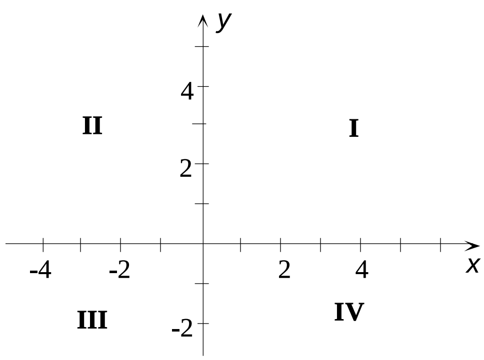
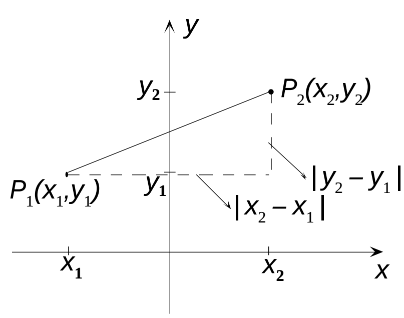
CHAPITRE 4   RELATIONS, FONCTIONS ET GRAPHES

4-1   *LE PLAN CARTÉSIEN*

Le **plan cartésien** ou le **système de coordonnées rectangulaires** est formé par une droite réelle horizontale et une droite réelle verticale qui se coupent à leur origine. Ces droites sont appelées les **axes de coordonnées**. En mathématiques, l'**axe horizontal** est nommé aussi l'**axe des *x*** et l'**axe vertical**, l'**axe des *y*.** On peut bien entendu remplacer les variables x et y par toute autre paire de variables. Ces axes divisent le plan en quatre **quadrants**.



À chaque point dans le plan, sont associés ses **coordonnées**, une paire ordonnée (a,b) déterminée par une droite horizontale et une droite verticale passant par le point. Ainsi, a est l'**abscisse** ou la **coordonnée *x*** du point et correspond à l'intersection de la droite verticale avec l'axe horizontal, tandis que b est l'**ordonnée** ou la **coordonnée *y*** du point et correspond à l'intersection de la droite horizontale et de l'axe vertical. Le point (0,0) est appelé l'**origine**. Tout point du plan peut être caractérisé par ses coordonnées (x , y). Si nous considérons 2 points $P_1\ (x_1 , y_1)$ et $P_2\ (x_2, y_2)$ dans le plan, la **distance entre ces deux points** P_1 et P_2 est $d(P_1 , P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Exemple 4-1.1   Trouvez la distance entre les points $P\,(-2 , 5)$ et $Q\,(3 , 1)$.

$$d(P , Q) = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [1 - 5]^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

Le point milieu d'un segment de droite qui va du point $P_1\ (x_1 , y_1)$ au point $P_2\ (x_2, y_2)$ est

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Exemple 4-1.2 Soit les points $A\,(-3\,,-2)$ et $B\,(4\,,3)$. Le point milieu du segment allant de A à B est $P\left(\frac{-3+4}{2}\,,\,\frac{-2+3}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$

4-2 *ÉQUATIONS DE DEUX VARIABLES, SOLUTIONS GRAPHIQUES*

Nous avons vu au chapitre 3 les notions d'équations et d'inéquations à 1 variable ainsi que leur ensemble solution. Que se passe-t-il si 2 variables sont présentes dans l'équation, par exemple $x + 2y = 4$? Pour parler d'une solution de cette équation, nous devons fournir une valeur de x et une valeur de y, donc une paire (ou un couple) de valeurs $(x\,,y)$. Dans ce cas-ci, $(2\,,1)$, $(0\,,2)$ et $\left(3\,,\frac{1}{2}\right)$ sont des solutions de $x + 2y = 4$, mais $(1\,,1)$ n'est pas une solution.

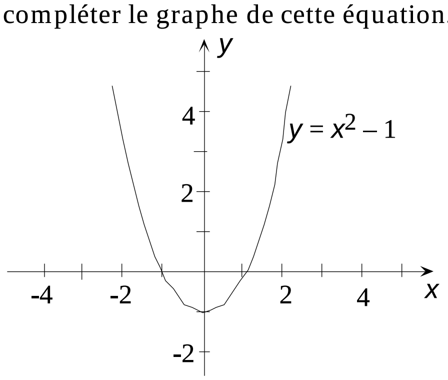
On constate qu'une équation à deux variables indique une relation entre ces variables. Ses solutions sont les couples qui vérifient l'équation et chacun de ces couples peut être représenté par un point du plan cartésien.

L'**ensemble solution** d'une équation de deux variables est l'ensemble de toutes les paires ordonnées de nombres réels qui font de l'équation un énoncé vrai. Le **graphe d'une équation de deux variables** est le graphe de son ensemble solution et on obtient en général une droite ou une courbe dans le plan cartésien.

Exemple 4-2.1 Trouver la représentation, dans le plan cartésien, des solutions à l'équation $y = x^2 - 1$

On peut donner certaines valeurs à x pour trouver les valeurs correspondantes de y et ainsi obtenir plusieurs points solutions: $(0\,,-1)$, $(-1\,,0)$, $(1\,,0)$, $(2\,,3)$, etc.

Après avoir placé ces points dans le plan cartésien, on peut par extrapolation compléter le graphe de cette équation.



Lorsqu'on étudie une équation, on peut rencontrer certaines propriétés de symétrie qui peuvent nous aider à tracer son graphe:

Un graphe est symétrique par rapport à

1. **l'axe *y*** si $(-a\ ,b)$ fait partie du graphe lorsque (a,b) fait partie du graphe.
2. **l'axe *x*** si $(a\ ,-b)$ fait partie du graphe lorsque (a,b) fait partie du graphe.
3. **l'origine (l'axe *x* <u>et</u> l'axe *y*)** si $(-a\ ,-b)$ fait partie du graphe lorsque (a,b) fait partie du graphe.

TEST DE SYMÉTRIE D'UNE ÉQUATION

Symétrie par rapport à:	**L'équation est équivalente lorsque:**
l'axe des y	x est remplacé par $-x$
l'axe des x	y est remplacé par $-y$
l'origine	x *et* y sont remplacés par $-x$ et $-y$

Exemple 4-2.2 a) Lorsqu'on remplace x par $-x$ dans l'équation $y = x^2 - 1$, on obtient $y = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$, une équation équivalente. Le graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des y.

b) Soit l'équation $y = x^3$. Si on remplace x par $-x$, on aura $y = (-x)^3 = -x^3$, qui n'est pas équivalente à l'équation de départ.
Par contre, si on remplace x par $-x$ <u>et</u> y par $-y$,
on aura $-y = (-x)^3 \qquad -y = -x^3 \qquad y = x^3$.
Le graphe de $y = x^3$ est donc symétrique par rapport à l'origine.

4-3 *LA DROITE, LE CERCLE ET L'ELLIPSE*

Certains types d'équations à 2 variables reviennent très souvent en sciences appliquées. Nous en verrons 3 dans cette section.

La droite:

Lorsqu'on veut parler d'une relation entre deux variables entre lesquelles l'on a constaté une progression linéaire, on aura une équation ayant la **forme standard** $Ax + By = C$, où A, B et C sont des constantes, A ou B non nulles et où $x, y \in \mathbb{R}$. Une droite est la représentation graphique de l'ensemble solution de cette équation.

L'**ordonnée à l'origine** est l'ordonnée du point où le graphe de la droite rencontre l'axe des y, l'**abscisse à l'origine** est l'abscisse du point où le graphe rencontre l'axe des x. La **pente** de la droite qui joint les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{si } x_1 \neq x_2$$

Lorsque $x_1 = x_2$ pour tous les points de la droite, la droite est verticale et sa pente n'est pas définie. Deux droites de pentes m_1 et m_2 sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$ et elles sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 m_2 = -1$.

Il existe plusieurs façons de représenter l'équation d'une droite. Elles sont résumées dans le tableau suivant:

ÉQUATION DE LA DROITE		
Forme standard	$Ax + By = C$	$A \neq 0$ ou $B \neq 0$
Forme pente-ordonnée à l'origine	$y = mx + b$	Pente: m; ordonnée à l'origine: b
Forme pente-coordonnées	$y - y_1 = m(x - x_1)$	Pente: m; point: (x_1,y_1)
Droite horizontale	$y = b$	Pente: 0
Droite verticale	$x = a$	Pente: non définie

Exemple 4-3.1 Quelle est l'équation de la droite passant par les points $(2, -1)$ et $(-3, 5)$?

Calculons la pente: $m = \dfrac{5-(-1)}{-3-2} = \dfrac{6}{-5} = -\dfrac{6}{5}$

Une fois qu'on connaît la pente, on peut utiliser, indifféremment, une des deux formes suivantes:

i) $y = mx + b$

$y = -\dfrac{6}{5}x + b$ et on utilise un des points pour déterminer la valeur de b:

$-1 = -\dfrac{6}{5} \cdot 2 + b \qquad b = -1 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{7}{5}.$

$y = -\dfrac{6}{5}x + \dfrac{7}{5}$

ii) $y - y_1 = m(x - x_1)$ en se servant du deuxième point:

$y - 5 = -\dfrac{6}{5}(x - (-3)) = -\dfrac{6}{5}(x + 3)$

$$y - 5 = -\frac{6}{5}(x + 3)$$

Cette forme est équivalente à la première trouvée.

Dans les deux cas, on peut se ramener à la forme standard équivalente:

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5} \qquad 5y = -6x + 7 \qquad 6x + 5y = 7$$

Exemple 4-3.2 Quelle est l'équation de la droite passant par le point $(4 , 1)$ qui est perpendiculaire à la droite $x - 3y = 4$?

i) Commençons par trouver la pente de la droite $x - 3y = 4$:

$$x - 4 = 3y \qquad y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}. \text{ Donc } m_1 = \frac{1}{3}$$

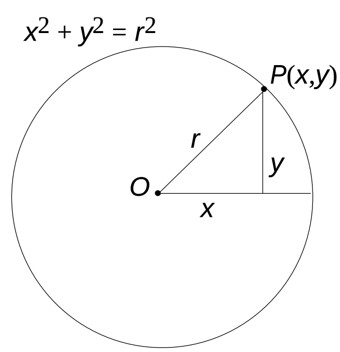
ii) Puisqu'on veut une droite perpendiculaire, la pente de la droite cherchée doit être m_2 et $\frac{1}{3}m_2 = -1 \qquad m_2 = -3$

$y = -3x + b$ et puisqu'elle doit passer par $(4 , 1)$, $1 = -3\cdot 4 + b \qquad b = 13$

donc $y = -3x + 13$.

Le cercle :

Si tous les points (x , y) d'un graphe sont à une égale distance $r > 0$ de l'origine [le point $(0 , 0)$], alors ils satisfont l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ qui est l'équation du cercle centré à l'origine. Par le théorème de Pythagore, on voit bien que $x^2 + y^2 = r^2$.



Si le cercle n'est pas centré à l'origine, mais sur un point de coordonnées (h , k) alors l'équation générale du cercle sera $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, où $r > 0$ est le rayon du cercle.

Exemple 4-3.3 Le graphe de l'équation $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 5$ sera celui d'un cercle de rayon $\sqrt{5}$, centré en $(-2 , 5)$.

Exemple 4-3.4 Dans le plan, quelle figure géométrique représentera l'équation $x^2 - 6x + y^2 = 25$?

La présence du terme $(-6x)$ nous dit que l'on doit compléter le carré de l'expression en x: $x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$

On aura donc $(x-3)^2 - 9 + y^2 = 25$

$(x-3)^2 + y^2 = 34$

On aura un cercle de rayon $\sqrt{34}$ centré en (3 , 0).

L'ellipse:

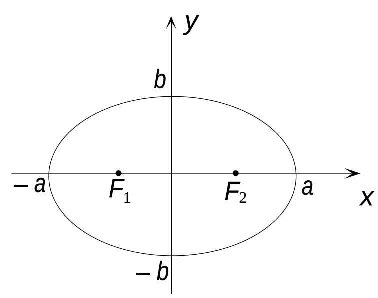
L'équation générale d'une ellipse centrée à l'origine est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a,b > 0$$

On remarque que si b = a, on retrouve l'équation du cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

De plus, si on remplace x par $(x-h)$ et y par $(y-k)$, on obtiendra l'équation générale d'une ellipse centrée au point (h , k):

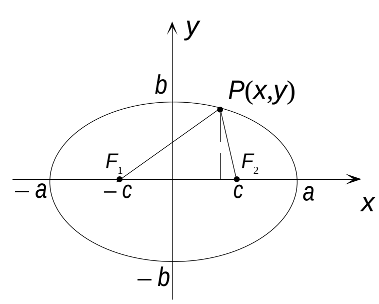
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$



Voici, à droite, le graphe d'une ellipse centrée à l'origine, pour laquelle $a > b$.

Si on pose y = 0 dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on aura $x^2 = a^2 \quad x = \pm a$. Donc les points $(-a , 0)$ et $(a , 0)$ sont sur le graphe. Puisque dans le graphe précédent, on considérait $a > b$, l'ellipse est caractérisée par 2 axes: les grand axe sur l'abscisse qui va de $-a$ à a et le petit axe sur l'ordonnée de $-b$ à b. Si on avait $b > a$, alors le grand axe serait vertical.

En géométrie, on définit l'ellipse comme l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes (appelés **foyers**) est constante. La distance entre le centre de l'ellipse et un des foyers est appelée **distance focale**. Le dessin de droite représente une ellipse pour laquelle la distance focale est c et $a > b$; son équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



On peut montrer les résultats suivants:

$d(F_1 , P) + d(F_2 , P) = 2a$

$c^2 + b^2 = a^2$ donc la distance focale $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

On définit l'excentricité (notée e) d'une ellipse comme le rapport: $e = \frac{c}{a}$

Remarque: Une inéquation à 2 variables sera représentée par une région du plan au lieu d'une courbe. Par exemple, $x^2 + y^2 < 4$ désigne la région à l'intérieur du cercle de rayon 2, centré à l'origine.
L'inéquation $y < 2x + 3$ désigne la région qui est sous la droite $y = 2x + 3$.

4-4 *LES FONCTIONS ET LEURS GRAPHES*

Si A et B sont deux ensembles non vides, une fonction de l'ensemble A vers l'ensemble B est une règle qui associe à chaque élément de A un et un seul élément de B. On écrit souvent $f\colon A \to B$.
Si $x \in A$, on dénote par $f(x)$ l'élément de B associé à x; on note $f(x)$ la valeur de f au point x ou encore l'image de f au point x.

L'ensemble A s'appelle le <u>domaine de f</u> et est noté Dom(f). L'ensemble des valeurs de B qui sont atteintes par la fonction s'appelle l'<u>image de f</u> et est noté Im(f); on a donc Im(f) $\subset B$.

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit l'équation $y = x^2 + 2$. On dit ici que y est une fonction de x; $y = f(x) = x^2 + 2$ puisque chaque élément x du domaine est envoyé sur la valeur $x^2 + 2$ et qu'aucun nombre x n' est envoyé sur deux éléments différents de l'image de f. Dans cet exemple, Dom(f) = $\mathbb{R}$ et Im(f) = $\{x \mid x \geq 2\}$.

Dans l'exemple précédent, la variable x est la variable indépendante (celle qui est transformée par la fonction) et y est la variable dépendante (celle dont la valeur dépend de celle donnée à x).

Faire le graphe d'une fonction consiste à tracer dans le plan la courbe reliant les points $(x , f(x)) = (x , y)$ où $x \in$ Dom(f); c'est donc tracer l'équation $y = f(x)$.

Pour satisfaire la définition, une droite verticale rencontre le graphe d'une fonction en au plus un point. À moins qu'il en soit spécifié autrement, le domaine d'une fonction définie par une équation est l'ensemble de tous les nombres réels qui, lorsqu'ils remplacent la variable indépendante, produisent un nombre réel pour la variable dépendante.

L'abscisse de tout point où le graphe de la fonction f rencontre l'axe des x est appelé une **intersection *x*** de f. L'ordonnée de tout point où le graphe de la fonction f rencontre l'axe des y est appelé une **intersection *y*** de f.

Exemple 4-4.1 Soit l'équation $y = f(x) = \sqrt{x+2}$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Pour que y existe, il faut que $x + 2 \geq 0 \quad x \geq -2$

Donc $\mathrm{Dom}(f) = [-2, \infty)$

Comme $\sqrt{x+2}$ est positif ou nul, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

Exemple 4-4.2 Soit l'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Comme il s'agit d'un cercle de rayon 2 centré à l'origine et qu'une droite verticale peut rencontrer son graphe à 2 endroits, on sait que cette équation ne définit pas une fonction. D'ailleurs, si on essaie d'isoler y, on aura $y^2 = 4 - x^2 \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ et on remarque que si on pose $x = 0$ alors $y = 2$ ou $y = -2$.

Par contre, $y = \sqrt{4 - x^2} = g(x)$ définit une fonction dont le graphe est le demi-cercle supérieur de rayon 2 centré à l'origine. De plus, $\mathrm{Dom}(g) = [-2, 2]$ et $\mathrm{Im}(g) = [0, 2]$

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. On dit que

f est **injective** si $\quad x_1, \quad x_2 \in A, \mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2) \quad x_1 = x_2$

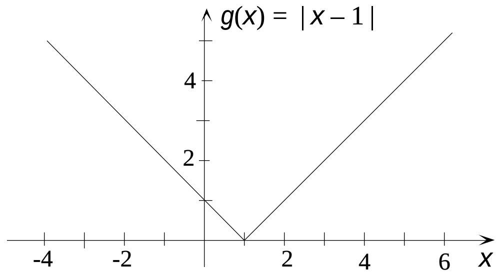
f est **surjective** si $\mathrm{Im}(f) = B$

f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. (Chaque élément de A est en correspondance avec un seul élément de B et vice-versa.)

Soit I un intervalle dans le domaine de f et soit a et b dans I. Alors:

1. f est **croissante** sur I si $f(b) > f(a)$ pour tout $b > a$.
2. f est **décroissante** sur I si $f(b) < f(a)$ pour tout $b > a$.
3. f est **constante** sur I si $f(b) = f(a)$ pour tout a et b.

Exemple 4-4.3 Soit $g(x) = |x-1|$ dont le graphe est le suivant:



Cette fonction est croissante sur $[1, \infty)$ et décroissante sur $(-\infty, 1]$

De plus, sur $\mathbb{R}$ cette fonction n'est pas bijective car $g(0) = g(2) = 1$.

Par contre, si on restreint le domaine à $[1, \infty)$, cette fonction devient bijective.

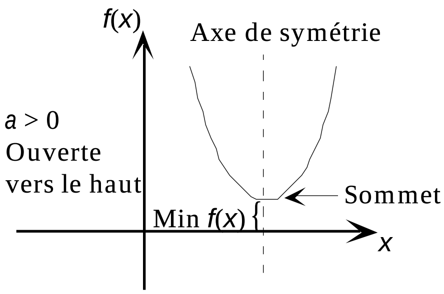
Une fonction f est une fonction linéaire si $f(x) = mx + b$ avec $m \neq 0$. La droite que nous avons étudiée dans la section précédente en est la représentation graphique.

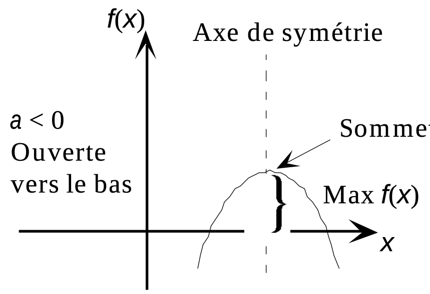
Une fonction f est une fonction quadratique si $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$. Cette fonction et son graphe (qu'on appelle parabole) ont les propriétés suivantes, qu'on retrouve en se rappelant qu'on peut compléter le carré: $f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$:

1. **Axe de symétrie**: $x = -\frac{b}{2a}$

2. **Sommet**: $\left(-\frac{b}{2a} , f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right)$

3. $f\left(-\frac{b}{2a} \right) = \begin{cases} \text{La valeur minimale de } f(x) & \text{si } a > 0 \\ \text{La valeur maximale de } f(x) & \text{si } a < 0 \end{cases}$

4. 



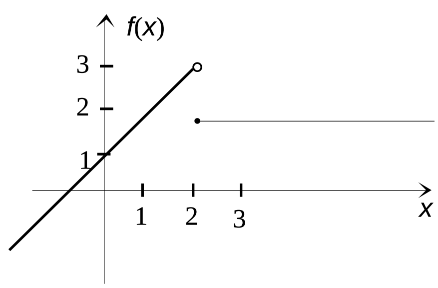
5. **Domaine**: tous les nombres réels; **image**: à identifier d'après le graphique;

si $a > 0$, alors $\text{Im} = \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty \right)$

si $a < 0$, alors $\text{Im} = \left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right]$

Une **fonction définie par morceaux** est une fonction dont la définition fait appel à plus d'une formule, c'est-à-dire que c'est une fonction qui est définie à l'aide de plus d'une fonction distincte sur des intervalles distincts de son domaine.

Exemple 4-4.4 Soit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



Le graphe d'une fonction est **continu** s'il n'a pas de trous ou coupures (de sauts) et il est **discontinu** à tout point où il y a un trou ou une coupure.

Exemple 4-4.5 a) Le graphe de l'exemple précédent n'est pas continu puisqu'il y a une coupure en $x = 2$. Si la fonction avait pris la valeur constante 3 au lieu de 2, le graphe aurait été continu. Par contre, ce graphe est continu si on restreint son domaine à un des deux intervalles $x \geq 2$ ou bien $x < 2$.

b) Le graphe de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est sûrement pas continu sur le domaine de $g(x)$ puisque $g(0)$ n'est pas définie.

Remarque: Un graphe est continu sur un intervalle I si on peut tracer la fonction sans lever le crayon, sur cet intervalle.

Voici plusieurs propriétés des graphes qui nous permettent de mieux analyser ceux-ci ou qui peuvent nous permettre de déduire un graphe à partir d'un autre.

Les tests de symétrie:

$f(-x) = f(x)$	f est une **fonction paire** dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical.
$f(-x) = -f(x)$	f est une **fonction impaire** dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Translation le long de l'axe vertical:

$y = f(x) + k, k > 0$	Translate le graphe de $y = f(x)$ vers le haut de k unités.
$y = f(x) - k, k > 0$	Translate le graphe de $y = f(x)$ vers le bas de k unités.

Translation le long de l'axe horizontal:

$y = f(x - h), h > 0$	Translate le graphe de $y = f(x)$ vers la droite de h unités.
$y = f(x + h), h > 0$	Translate le graphe de $y = f(x)$ vers la gauche de h unités.

Réflexion:

$y = -f(x)$	Réfléchit le graphe de $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x.

Dilatation et contraction:

$y = Cf(x), C > 1$	Dilate le graphe de $y = f(x)$ en multipliant chaque ordonnée par la valeur C.
$y = Cf(x), 0 < C < 1$	Contracte le graphe de $y = f(x)$ en multipliant chaque ordonnée par la valeur C.

Exemple 4-4.6 Soit $f(x) = x^2$

a) C'est une fonction paire puisque $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

b) Si on veut obtenir le graphe de $g(x) = x^2 + 4$, on n'a qu'à prendre celui de $f(x)$ et le translater de 4 unités vers le haut.

c) Si on veut obtenir le graphe de $h(x) = (x + 3)^2$, on n'a qu'à prendre celui de $f(x)$ et le translater de 3 unités vers la gauche.

Remarque: Souvent par abus de notation, on écrit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ même si le domaine de f n'est pas tout $\mathbb{R}$. Il faut être prudent et bien identifier le domaine de f.

4-5 *LES OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS*

La **somme**, la **différence**, le **produit** et le **quotient** des fonctions f et g sont définis par:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \;,\; g(x) \neq 0$$

Le **domaine** de chacune des nouvelles fonctions obtenues par ces opérations est l'intersection des domaines de f et g, à l'exception des valeurs de x pour lesquelles $g(x) = 0$ qui doivent être exclues du domaine de $f\ /\ g$.

La **composition** des fonctions f et g est définie par $(f \circ g)(x) = f\,[\,g(x)]$. Le **domaine** de $f \circ g$ est l'ensemble des nombres réels x dans le domaine de g pour lesquels $g(x)$ est dans le domaine de f. Le domaine de $f \circ g$ est toujours un sous-ensemble du domaine de g.

Exemple 4-5.1 Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

Dom(f) = $\{x \mid x \geq -1\}$ Dom (g) = $\mathbb{R} - \{3\}$

$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x-3}$ $(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$

Dom ($f+g$) = $[-1\,,\,3) \cup (3\,,\,\infty)$ Dom($f \cdot g$) = $[-1\,,\,3) \cup (3\,,\,\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f\,[\,g(x)] = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}+1} = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$

On peut montrer que $\dfrac{x-2}{x-3} \geq 0$ si $x \leq 2$ ou $x > 3$.

Donc Dom($f \circ g$) = $(-\infty\,,\,2] \cup (3\,,\,\infty)$.

Remarque: plusieurs fonctions usuelles peuvent être vues comme une composition de 2 fonctions. Par exemple, $f(x) = (2x-7)^4 = (g \circ h)(x)$ où $h(x) = 2x - 7$ et $g(x) = x^4$. Un bon test pour identifier des fonctions composées est le test du calcul. Si on veut trouver $f(3)$, on a 2 étapes:

1° évaluer $2 \cdot 3 - 7 = -1$

2° évaluer $(-1)^4 = 1$.

4-6 *EXERCICES*

***1.** Soient les points $A(-2,3)$ et $B(4,0)$, trouvez

a) La distance entre A et B

b) La pente de la droite passant par A et B

c) La pente de la droite perpendiculaire à la droite passant par A et B

***2.** Donnez l'équation du cercle de rayon $\sqrt{7}$ centré en

a) (0,0)

b) (3,-2)

3. Trouvez le centre et le rayon du cercle donné par
$(x+3)^2+(y-2)^2=5$

***4.** Faites le graphe de $3x+2y=9$ et indiquez sa pente.

5. Donnez l'équation de la droite dont l'abscisse à l'origine est 6 et l'ordonnée à l'origine est 4. Donnez la réponse finale sous forme $Ax+By=C$ où A, B et C sont des nombres entiers.

6. Donnez l'équation de la droite sous forme $y=mx+b$ sachant que la pente est $\frac{2}{3}$ et que l'ordonnée à l'origine est 2.

***7.** Donnez les équations ainsi que les pentes respectives des droites horizontales et verticales passant par (-3, 4).

8. Parmi ces expressions lesquelles définissent y comme fonction de x ?

a) $y=x$ b) $y^2=x$

c) $y^3=x$ d) $|y|=x$

Les problèmes 9-18 réfèrent aux fonction f, g, k et m suivantes

$f(x)=3x+5$ $g(x)=4-x^2$ $k(x)=5$ $m(x)=2|x|-1$

Trouvez les quantités ou expressions indiquées

***9.** $f(2)+g(-2)+k(0)$ **10.** $\dfrac{m(-2)+1}{g(2)+4}$ ***11.** $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ **12.** $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

13. $(f+g)(x)$ **14.** $(f-g)(x)$ **15.** $(fg)(x)$ **16.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

17. $(f\circ g)(x)$ **18.** $(g\circ f)(x)$

19. Trouvez les valeurs minimums et maximums de $f(x) = x^2 - 6x + 11$ sans tracer le graphe. Quelles sont les coordonnés du sommet du graphe.

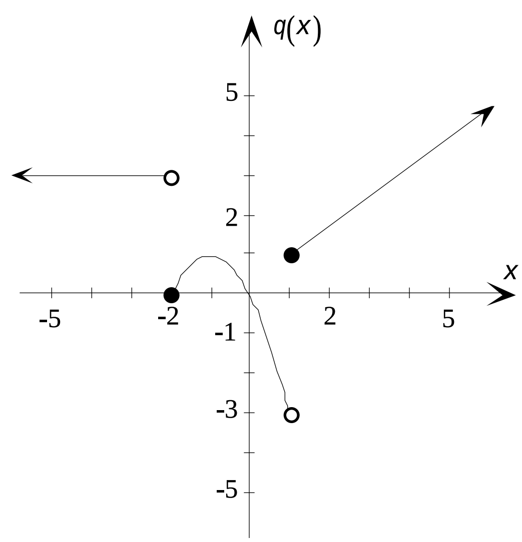
***20.** De quelle façon peut-on obtenir les graphes des fonctions suivantes à partir du graphe de $y = x^2$?

a) $y = -x^2$

b) $y = x^2 - 3$

c) $y = (x+3)^2$

Les problèmes 21-25 se réfère à la fonction q donnée par le graphe ci-dessous:



21. Trouvez le domaine et l'image de q.

22. Trouvez les intervalles pour lesquelles la fonction q est croissante.

23. Trouvez les intervalles pour lesquelles la fonction q est décroissante.

24. Trouvez les intervalles pour lesquelles la fonction q est constante.

25. Identifiez les points de discontinuité.

26. a) Trouvez l'équation de la droite passant par $P(-4,3)$ et $Q(0,-3)$. Donnez la réponse sous la forme $Ax + By = C$, où A, B, et C sont des entiers avec A > 0.

b) Trouvez d(P, Q)

***27.** Donnez les équations des droites

a) parallèle à

b) perpendiculaire à

la droite $6x + 3y = 5$ passant par le point $(-2,1)$. Donnez la réponse sous la forme $y = mx + b$

28. Analysez la symétrie du graphe de $4x^2 + 9y^2 = 36$ par rapport aux axes des x et des y.

29. Tracez le graphe de $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Indiquez l'axe de symétrie, les extrémums, les intersections avec les axes et le sommet de $f(x)$.

30. Soient $f(x) = \sqrt{x} - 8$ et $g(x) = |x|$:

a) Trouvez $f \circ g$ et $g \circ f$.

b) Donnez le domaine de $f \circ g$ et $g \circ f$.

31. Faites le graphe de la fonction suivante et trouvez le domaine, l'image et les points de discontinuité.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

32. Tracez le graphe de

a) $y = |x| - 2$

b) $y = |x + 1|$

c) $y = \frac{1}{2}|x|$

33. Trouvez l'équation du cercle passant par le point (−1, 4) et de centre (3,0).

34. Trouver le centre et le rayon du cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$

35. Analysez la symétrie par rapport aux axes et à l'origine et tracez le graphe de $xy = 4$

36. Si la pente d'une droite est négative, est-ce que la fonction dont le graphe est cette droite est une fonction croissante, décroissante ou constante sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$?

37. Trouvez le domaine de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

***38.** Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{1 - x}$, trouvez chacune des fonctions ainsi que son domaine

(A) fg (B) f/g (C) $f \circ g$ (D) $g \circ f$

***39.** Trouvez l'équation satisfaite par l'ensemble des points équidistants des deux points (3, 3) et (6,0). Quelle est le nom de cette figure géométrique ?

40. Quelle sera la représentation graphique des équations suivantes :

a) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + (y-5)^2 = 1$

b) $x^2 - 6x + y^2 + y + \dfrac{21}{4} = 0$

41. **Dépréciation linéaire**. Un système informatique acheté par une petite compagnie au coût de 12 000$ aura une valeur dépréciée de 2 000$ après 8 ans. Si la valeur se déprécie linéairement de 12 000$ à 2 000$:

a) Trouvez l'équation linéaire reliant la valeur V (en dollars) au temps t (en années).
b) Quelle sera la valeur dépréciée du système après 5 ans?

***42.** **Affaires - fixation de prix**. Un magasin d'articles de sports vend 51$ des shorts de tennis lui coûtant 30$ et il vend 35$ des lunettes de soleil lui coûtant 20$.

a) Si la politique de prix du magasin pour des articles lui coûtant plus de 10$ est considérée comme linéaire et est illustrée par les prix de ces deux articles, écrivez une équation qui exprime le prix de détail R comme une fonction du coût C.

b) Quel devrait être le prix de détail d'une paire de skis qui coûte au magasin 105$?

43. **Salaire**. Un vendeur reçoit un salaire de base de 200$ par semaine et une commission de 10% sur le total des ventes excédant 3 000$ dans la semaine. Si x représente le montant des ventes hebdomadaires du vendeur, exprimez le salaire hebdomadaire E(x) comme une fonction de x. Trouvez E(2 000) et E(5 000).

4-7 *LES FONCTIONS INVERSES*

Comme nous l'avons déjà vu, une fonction est bijective s'il n'y a pas deux paires ordonnées dans la fonction ayant la même deuxième composante et des premières composantes différentes. Une droite horizontale rencontre le graphe d'une fonction bijective en au plus un point. Une fonction croissante (décroissante) sur son domaine est bijective. L'**inverse** d'une fonction bijective f est la fonction f^{-1} obtenue en inversant toutes les paires ordonnées de f. Si f n'est pas bijective, alors f^{-1} **n'existe pas**.

Supposons que f^{-1} existe, alors:

1. f^{-1} est bijective.
2. Le domaine de f^{-1} = l'image de f.
3. L'image de f^{-1} = domaine de f.
4. $x = f^{-1}(y)$ si et seulement si $y = f(x)$.

5. $f^{-1}[f(x)] = x$ pour tout x dans le domaine de f.
6. $f[f^{-1}(x)] = x$ pour tout x dans le domaine de f^{-1}.
7. Pour trouver f^{-1}, résoudre l'équation $y = f(x)$ pour x, puis changer x pour y, et y pour x.
8. Les graphes de $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

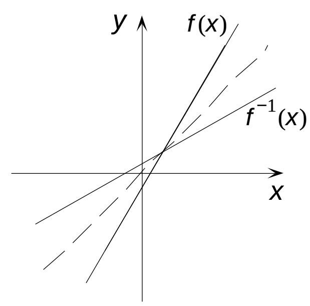
Exemples 4-7.1

a) Soit $f(x) = 2x - 1 = y$

$2x = y + 1$

$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



b) Soit $f(x) = \sqrt{x-1} = y$

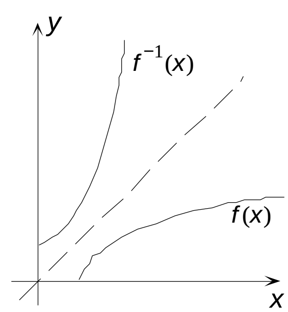
Dom(f) = $[1, \infty)$ et Im(f) = $[0, \infty)$

$x - 1 = y^2$

$x = y^2 + 1$

Donc $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

et Dom (f^{-1}) = $[0, \infty)$



4-8 *LES FONCTIONS POLYNOMIALES*

Nous voyons dans cette section une généralisation de concepts qu'on a déjà abordés dans certaines sections (entre autres 2-2, 2-3, …)

Une **fonction polynomiale de degré *n*** est une fonction de la forme:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels et n un entier, $n \geq 0$.

On peut généraliser en considérant que les coefficients de la fonction polynomiale de degré n, $P(x)$, sont des nombres complexes et que le domaine de la fonction est l'ensemble des nombres complexes. Le nombre r est un **zéro de la fonction P**, ou un **zéro du polynôme $P(x)$**, ou une **solution ou racine de l'équation $P(x) = 0$**, si $P(r) = 0$. Si les coefficients de $P(x)$ sont des nombres réels, alors les intersections x du graphe de $y = P(x)$ sont des zéros réels de $P(x)$, et des solutions ou **racines** réelles de l'équation $P(x) = 0$.

On retrouve plusieurs théorèmes importants se rapportant aux fonctions polynomiales.

Soit $P(x)$ un polynôme de degré supérieur à 0 et soit r un nombre réel.

Algorithme de division. $P(x) = (x - r)\, Q(x) + R$, où $x - r$ est le **diviseur**, $Q(x)$, le **quotient**, est un polynôme unique d'un degré inférieur à $P(x)$, et R, le **reste**, est un nombre réel unique.

Théorème du reste. $P(r) = R$.

Théorème de la factorisation. Le nombre r est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - r)$ est un facteur de $P(x)$.

Exemple 4-8.1 a) On veut diviser $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13$ par le facteur $(x - 3)$. En appliquant l'algorithme vu à la section 2-2, on aura:

$$\frac{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13}{x - 3} = 2x^3 + x^2 - x - 3 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc $P(x) = (x - 3)\cdot(2x^3 + x^2 - x - 3) + 4$ et $P(3) = 4$.

b) Si $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$, alors la division par $(x - 3)$ ne produit pas de reste et on a:

$$P(x) = (x - 3)\cdot(2x^3 + x^2 - x - 3)$$

On dit que $x = 3$ est un **zéro** ou une **racine** de $P(x)$ car $P(3) = 0$.

Une fonction polynomiale à coefficients réels est continue partout et son graphe n'a pas de trous ou cassures.
Si $P(x)$ est un polynôme de degré $n > 0$ et que $x \quad \mathbb{C}$ alors nous avons les théorèmes importants suivants:

Théorème fondamental de l'algèbre. $P(x)$ possède au moins un zéro.

Théorème des n zéros. $P(x)$ peut s'exprimer comme le produit de n facteurs linéaires et possède n zéros non nécessairement distincts.

Théorème des zéros imaginaires. Si $P(x)$ est à coefficients réels, alors les zéros imaginaires de $P(x)$, s'il y en a, apparaissent en paires conjuguées.

Zéros réels et polynômes de degré impair. Si $P(x)$ est à coefficients réels et est de degré impair, alors $P(x)$ possède toujours au moins un zéro réel.

Si $P(x)$ est écrit sous la forme d'un produit de facteurs linéaires et si $(x - r)$ apparaît m fois, alors on dit que r est un **zéro de multiplicité *m*** et $(x - r)^m$ est un facteur de $P(x)$.

Donc un polynôme de degré $n > 0$ à coefficients réels peut toujours se décomposer (de façon unique) en un produit de facteurs linéaires (du type $ax + \mathrm{b}$) ou quadratiques irréductibles (du type $ax^2 + bx + c$, avec $b^2 - 4ac < 0$); chacun de ces facteurs peut apparaître plusieurs fois dans la décomposition.

Exemple 4-8.2 Soit $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

Par essais et erreurs, on trouve $P(1) = 0$
On conclut que $x = 1$ est un zéro et donc que $(x - 1)$ est un facteur.
Après division, on trouve $P(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$.
Le polynôme est donc factorisé sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + 4$ a des racines complexes.
Si on factorise sur $\mathbb{C}$, on aura $P(x) = (x - 1)(x + 2i)(x - 2i)$

Théorème de localisation. Si $P(a)$ et $P(b)$ sont de signes opposés, alors il existe au moins une racine entre a et b.

Exemple 4-8.3 Soit $P(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9$

Comme $P(1) = 8 > 0$ et $P(2) = -3 < 0$, on sait qu'il y a au moins une racine réelle entre $x = 1$ et $x = 2$.

Théorème des racines rationnelles. Si un nombre rationnel réduit b/c est une racine du polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

à coefficients entiers, alors b divise a_0 et c divise a_n

Exemple 4-8.4 Soit $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

Si $\frac{b}{c}$ est une racine de $P(x)$, alors b divise 5 et c divise 2. Les candidats sont donc ±5, ±1, $\frac{\pm5}{2}$ et $\frac{\pm1}{2}$.

Après essais, on trouve que $P\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$. Donc $x = \frac{-1}{2}$ est une racine.

Pour trouver le facteur, on pose $x = \frac{-1}{2}$ $\quad x + \frac{1}{2} = 0 \quad 2x + 1 = 0$.

$(2x + 1)$ étant un facteur de $P(x)$, on divise pour obtenir $P(x) = (2x + 1)(x^2 - 4x + 5)$.

Avec la formule quadratique, on obtient que les racines de $x^2 - 4x + 5$ sont $2 \pm i$.

Donc $P(x)$ a 3 racines (sur $\mathbb{C}$): $\frac{-1}{2}$, $2 + i$ et $2 - i$.

4-9 *LES FONCTIONS RATIONNELLES*

Une fonction de la forme $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, où $n(x)$ et $d(x)$ sont des polynômes, est une **fonction rationnelle**.

La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** pour le graphe de $y = f(x)$ si $f(x)$ tend vers l'infini, noté $f(x) \to \infty$, ou si $f(x)$ tend vers "moins l'infini", noté $f(x) \to -\infty$, lorsque $x \to a^+$ (x tend vers a par la droite) ou bien si $x \to a^-$ (x tend vers a par la gauche).

Si $d(a) = 0$ et $n(a) \neq 0$, alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale. La droite $y = b$ est une **asymptote horizontale** pour le graphe de $y = f(x)$ si $f(x) \to b$ lorsque $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

La droite $y = mx + b$ est une **asymptote oblique** si le degré de $n(x)$ est un de plus que le degré de $d(x)$ et si ce dernier pôlynome n'est pas un facteur de $n(x)$. L'équation de l'asymptote sera égal au quotient obtenu en divisant les deux pôlynomes.

Par exemple comme $\frac{x^2 + 4x + 5}{x - 2} = x + 6 + \frac{17}{x - 2}$ on aura $y = x + 6$ qui sera une asymptote oblique. En effet dans la partie droite de l'équation, plus x est grand, plus le comportement de la fonction rationnelle se rapprochera de celui de la droite $y = x + 6$ car plus x est grand, plus la valeur de $\frac{17}{x - 2}$ se rapproche de 0 .

Soit: $f(x) = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$, $a_m, b_n \neq 0$

1. Si $m < n$, alors l'axe des x est une asymptote horizontale.

2. Si $m = n$, alors la droite $y = a_m / b_n$ est une asymptote horizontale.

3. Si $m > n$, alors il n'y a pas d'asymptote horizontale.

Le graphe d'une fonction rationnelle: $f(x) = n(x) / d(x)$	
Étape 1:	*Les intersections.* Trouvez les solutions réelles de l'équation $n(x) = 0$ et utilisez ses solutions pour dessiner les intersections x du graphe de f. Évaluez, si elle existe, $f(0)$ et dessinez l'intersection y.
Étape 2:	*Les asymptotes verticales.* Trouvez les solutions réelles de l'équation $d(x) = 0$ et utilisez ses solutions pour identifier le domaine de f, les points de discontinuités et les asymptotes verticales. Dessinez en lignes pointillées les asymptotes verticales.
Étape 3:	*Le tableau de signes.* Construisez un tableau de signes pour f et utilisez-le pour étudier le comportement du graphe près de chaque asymptote verticale.
Étape 4:	*Les asymptotes horizontales.* Déterminez s'il existe une asymptote horizontale et s'il y a lieu, dessinez-la en ligne pointillée.
Étape 5:	*Symétrie.* Analysez les symétries par rapport à l'axe vertical et à l'origine.
Étape 6:	*Complétez le dessin.* Complétez le graphe en dessinant quelques points additionnels et en les joignant par une courbe lisse et continue sur chaque intervalle du domaine de f. (Ne joignez aucun point de discontinuité.)

Exemple 4-9.1

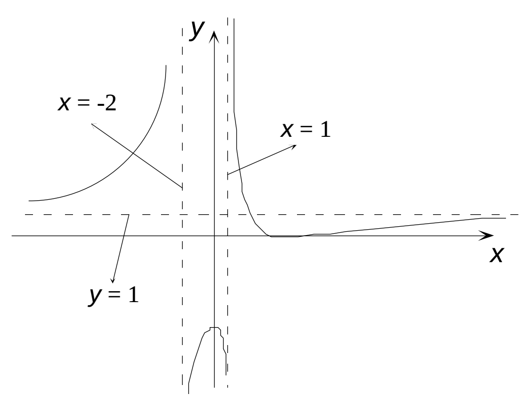
Soit $f(x) = y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(x-3)^2}{(x+2)(x-1)}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2 , 1\}$

asymptote horizontale: $y = 1$

asymptotes verticales: $x = -2$ et $x = 1$

Après avoir calculé certains points et avoir examiné $f(x)$ si $x \to 1^-$ et $x \to 1^+$, puis si $x \to -2^-$ et $x \to -2^+$, on peut obtenir le graphe suivant:



4-10 *EXERCICES*

***1.** Lesquelles parmi ces fonctions sont des bijections ?

a) $f(x) = x^3$

b) $g(x) = (x-2)^2$

c) $h(x) = 2x - 3$

d) $F(x) = (x+3)^2, \; x \geq -3$

2. Soit $f(x) = 3x - 7$

a) Trouvez $f^{-1}(x)$

b) Trouvez $f^{-1}(5)$

c) Trouvez $f^{-1}[f(x)]$

d) Est-ce que f est décroissante, croissante ou constante sur $(-\infty, \; \infty)$?

***3.** Soit $f(x) = \sqrt{x-1}$:

a) Trouvez $f^{-1}(x)$

b) Trouvez le domaine et l'image de f et f^{-1}

c) Tracez les graphe de f, f^{-1}, et $y = x$ sur un même graphique.

4. Soit $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$:

a) Trouvez le domaine et l'image de f et f^{-1}

b) Trouvez $f^{-1}(x)$.

c) Trouvez $f^{-1}(3)$.

d) Trouvez $f^{-1}[f(4)]$

e) Trouvez $f^{-1}[f(x)]$.

***5.** Divisez $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ par $D(x) = x + 2$, donnez la réponse sous la forme

$P(x) = D(x)Q(x) + R$.

6. Quels sont les zéros du polynôme $P(x) = 3(x-2)(x+4)(x+1)$?

***7.** Si $P(x) = x^2 - 2x + 2$ et $P(1+i) = 0$, trouvez un autre zéro de $P(x)$.

8. Comment peut-on vérifier que le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ possède au moins une racine entre 1 et 2 ?

9. Trouvez les racines rationnelles de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

10. Montrez que $P(x) = x^4 - x^2 - 2$ possède une racine entre 1 et 2**.** Trouvez cette racine à une décimale près.

***11.** Si $P(x) = 8x^4 - 14x^3 - 13x^2 - 4x + 7$, trouvez $Q(x)$ et R tels que $P(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)Q(x) + R$.
Quelle est la valeur de $P\left(\frac{1}{4}\right)$?

12. Si $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x - 3$, trouvez $P\left(-\frac{1}{2}\right)$

13 Factorisez $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

***14.** Est-ce que $x + 1$ est facteur de $P(x) = 9x^{26} - 11x^{17} + 8x^{11} - 5x^4 - 7$?
Expliquez sans diviser.

15. Trouvez le domaine et l'abscisse à l'origine de

a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x - 6}$

16. Trouvez les asymptotes horizontale et verticale du numéro 15.

17. Trouvez le domaine de $g(x) = 1/\sqrt{3 - x}$ **.**

18. Tracez le graphe de $f(x) = 1/(x + 2)$ en indiquant les asymptotes.

19. Soit : $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 2}$

a) Trouvez le domaine et les intersections avec les deux axes.

b) Trouvez les asymptotes verticale et horizontale de *f*.

c) Tracez le graphe de *f* en indiquant les asymptotes.

***20.** Soit la bijection *f* donnée par.

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

a) Trouvez $f^{-1}(x)$.

b) Trouvez $f^{-1}(3)$.

c) Trouvez $f^{-1}[f(x)]$.

***21.** Trouvez toutes les racines rationnelles de

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 8$.

22. Factorisez le polynôme du numéro 21.

23. Trouvez toutes les racines rationnelles de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

24. Trouvez les racines: $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$.

25. Factorisez le polynôme du numéro 24.

26. Trouvez un polynôme de plus petit degré avec le coefficient dominant 1 qui a les zéros suivants :
$-\frac{1}{2}$ (multiplicité 2), -3 (multiplicité 1) et 1 (multiplicité 3)
Laissez votre réponse sous la forme factorisée. Quel est le degré du polynôme?

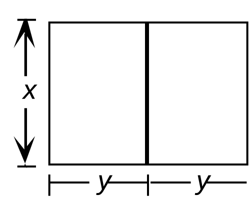
27. Tracez le graphe de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$$

en indiquant les asymptotes verticales, horizontales et obliques.

***28.** Une arche circulaire forme le dessus d'un cadre de porte dont les côtés verticaux ont 6 pieds de haut et sont espacés de 8 pieds. Si le dessus de l'arche est à 2 pieds au-dessus de ses extrémités, quel est le rayon de l'arche?

29. Un fermier possède 120 pieds de clôture à utiliser dans la construction de deux enclos rectangulaires et identiques qui partagent un côté commun (voir la figure).



a) Exprimez l'aire totale $A(x)$ comprise par les deux enclos en fonction de la largeur x.

b) En tenant compte de considérations physiques, quel est le domaine de la fonction A?

c) Trouvez les dimensions des enclos qui maximiseront l'aire totale comprise par les enclos.

30. Une entrée est formée en plaçant une porte rectangulaire à l'intérieur d'une arche d'équation $y = 16 - x^2$ où x et y sont en pieds. Si la surface de la porte est de 48 pieds carrés, quelles seront la hauteur et la largeur de la porte?

CHAPITRE 4 RÉPONSES

SECTION 4-6

1. a) $\sqrt{45}$

b) $m = -\frac{1}{2}$

c) $m_1 = 2$

2. a) $x^2 + y^2 = 7$

b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 7$

3. Centre : $C(h,\ k) = (-3,\ 2)$

Rayon : $r = \sqrt{5}$

4. Pente : $-\frac{3}{2}$

5. $2x + 3y = 12$

6. $y = \frac{2}{3}x + 2$

7. Verticale : $x = -3$ pente non définie;

Horizontale : $y = 4$, pente = 0

8. a) Fonction

b) N'est pas fonction

c) Fonction

d) N'est pas fonction

9. 16

10. 1

11. 3

12. $-2a - h$

13. $9 + 3x - x^2$

14. $x^2 + 3x + 1$

15. $20 + 12x - 5x^2 - 3x^3$

16. $\frac{3x+5}{4-x^2}$; domaine : $\{x | x \neq \pm 2\}$

17. $17 - 3x^2$

18. $-21 - 30x - 9x^2$

19. $Min\ \ en\ \ x = -\frac{b}{2a} = 3.$

Donc $Min = f(3) = 2$

Sommet en $(3,\ f(3)) = (3, 2)$

20. a) Symétrie par rapport à l'axe des x

b) Descendre la courbe de 3 unités

c) Déplacer la courbe de 3 unités vers la gauche

21. Domaine = $(-\infty,\ \infty)$

Image = $(-3,\ \infty)$

22. $[-2,\ -1],\ [1,\ \infty)$

23. $[-1,\ 1)$

24. $(-\infty,\ -2)$

25. $x=-2,\ x=1$

26. a) $3x+2y=-6$

b) $\sqrt{52}$

27. a) $y=-2x-3$

b) $y=\dfrac{1}{2}x+2$

28. Symétrique par rapport aux deux axes. Il s'agit d'une ellipse centrée à l'origine avec a = 3 et b = 2

29. $Min\ \ f(x)=f(3)=-4$

$y=[-4,\ \infty)$

Intersection avec l'ordonnée : $y=f(0)=5$

Intersection avec l'abcisse : $x=1,\ x=5$

30. a) $(f\circ g)(x)=\sqrt{|x|}-8;\ (g\circ f)(x)=\left|\sqrt{x}-8\right|$

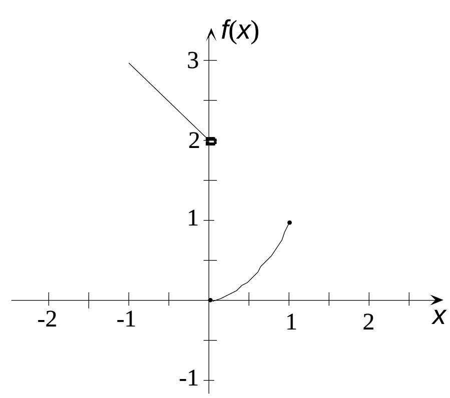
b) domaine de $f\circ g$ est $\mathbb{R}$

domaine de $g\circ f$ est $[0,\ \infty)$

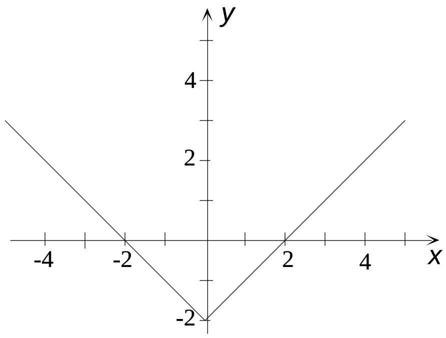
31. Domaine : $[-1,\ 1]$

Image : $[0,\ 1]\quad(2,\ 3]$

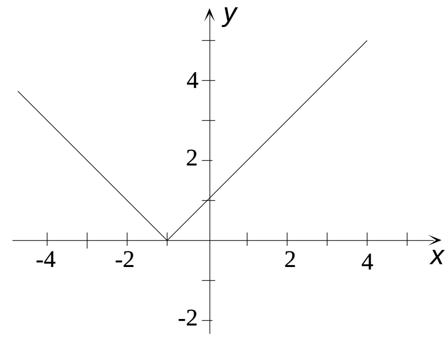
un point de discontinuité en $x=0$



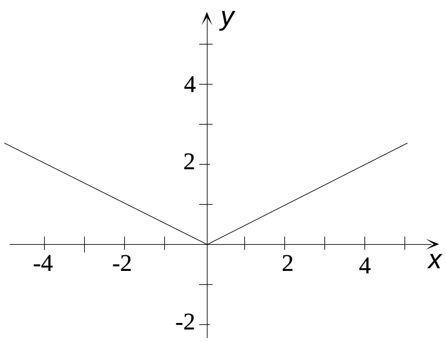
32. a)



b)



c)

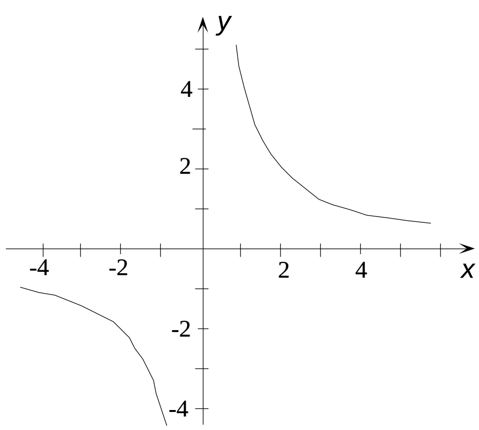


33. $(x-3)^2 + y^2 = 32$

34. Centre : $C(h,\ k) = C(-2,\ 3)$;

Rayon : $r = \sqrt{16} = 4$

35. Symétrique par rapport à l'origine



36. Décroissante

37. $[-5,\ 5]$

38. a) $(fg)(x) = x^2\sqrt{1-x}$; $(-\infty,\ 1]$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}$; $(-\infty,\ 1)$

c) $(f \circ g)(x) = 1 - x$; $(-\infty,\ 1]$

d) $(g \circ f)(x) = \sqrt{1-x^2}$; $[-1,\ 1]$

39. $x - y = 3$; c'est une droite

40. a) Ellipse centrée en $(2,\ \ 5)$

avec a = 3 et b = 1

b) Cercle de rayon 2 centré en $\left(3,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

41. a) $V = -1\ 250t + 12\ 000$

b) $V = 5\ 750$ \$

42. a) $R = 1{,}6C + 3$

b) $R = 171$ \$

43. $E(x) = \begin{cases} 200 & si\ \ 0 \le x \le 3\ 000 \\ 0{,}1x - 100 & si\ \ x > 3 \end{cases}$; $E(2\ 000) = 200,\ E(5\ 000) = 400$

SECTION 4-10

1. a) , c) et d)

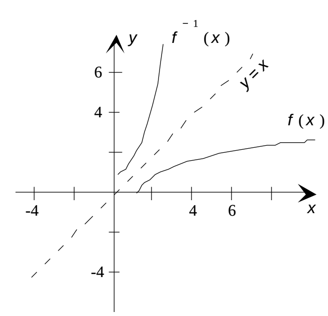
2. a) $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$ b) 4

c) x d) Croissante

3. a) $f^{-1}(x) = 1 + x^2$

b) Domaine de $f = [1,\ \infty)$ = image de f^{-1};

Image de $f = [0,\ \infty)$ = domaine de f^{-1}

c) 

4. a) Domaine de $f = [0,\ \infty)$ = image de f^{-1} ; .image de $f = [-1,\ \infty)$ = domaine de f^{-1}

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f^{-1}(3) = 2$

d) $f^{-1}[f(4)] = 4$

e) $f^{-1}[f(x)] = x$

5. $2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+2)(2x^2 - x + 2) - 5$

6. $2,\ -4,\ -1$

7. $1 - i$

8. $P(1) = -5$ et $P(2) = 1$

9. $2,\ 3,\ -1$

10. 1,4

11. $P(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(8x^3 - 12x^2 - 16x - 8) + 5;\ P\left(\frac{1}{4}\right) = 5$

12. -4

13. $P(x) = \left[x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\left[x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$

14. $P(-1) = 0,\ x - (-1) = x + 1$

Donc, oui

15. a) $(-\infty,\ -4)$ $(-4,\ \infty)$ l'intersection avec l'abcisse : $x = \frac{3}{2}$

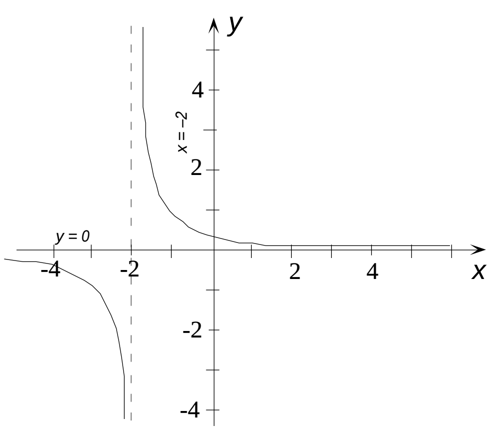
b) $(-\infty,\ -2)$ $(-2,\ 3)$ $(3,\ \infty)$; l'intersection avec l'abcisse : $x = 0$

16 a) $y = 2;\quad x = -4$

b) $y = 0;\quad x = -2,\ x = 3$

17. $(-\infty, 3)$

18.



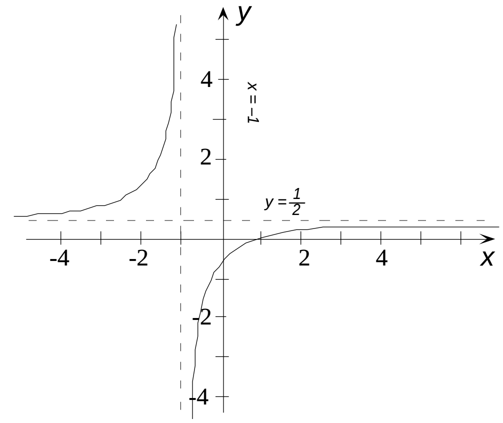
19. a) $(-\infty,\ -1)\quad(-1,\ \infty)$;

intersection avec l'abcisse : $x = 1$;

intersection avec l'ordonnée : $y = -\dfrac{1}{2}$

b) $x = -1.\quad y = \dfrac{1}{2}$

c)



20. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ b) $f^{-1}(3) = \dfrac{11}{2}$

c) $f^{-1}\left[f(x)\right] = x$

21. $4,\ -\dfrac{1}{2},\ -2$

22. $(x-4)(2x+1)(x+2)$

23. Aucune racine rationnelle

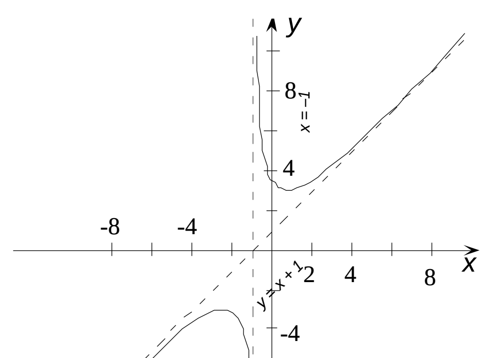
24. $-1,\ \dfrac{1}{2},\ et\ \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

25. $(x+1)(2x-1)\left(x - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

26. $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 (x+3)(x-1)^3.$

Le degré est 6.

27.



28. $r = 5$ pieds

29. (A) $A(x) = 60x - \dfrac{3}{2}x^2$ (B) $0 < x < 40$

(C) $x = 20,\ y = 15$

30. Il y a 2 solutions : 4 pieds de large sur 12 pieds de haut <u>ou bien</u> 5,2 pieds de large sur 9,2 pieds de haut.

RÉVISION: EXERCICES SUR LES CHAPITRES 3 ET 4

1. Résolvez pour x : $\frac{7x}{5} - \frac{3+2x}{2} = \frac{x-10}{3} + 2$

2. Soient $A(3,2)$ et $B(5,6)$, trouvez

a) la distance entre les points A et B;

b) la pente de la droite passant par A et B;

c) la pente de la droite perpendiculaire à celle décrite en b).

3. Trouvez l'équation du cercle de rayon $\sqrt{2}$ dont le centre est

a) (0, 0)

b) (-3, 1)

Solutionnez et tracez le graphe des problèmes 4 à 6

4. $2(3-y)+4 \leq 5-y$

5. $|x-2| < 7$

6. $x^2 + 3x \geq 10$

7. Tracez la droite $2x$-$3y$ = 6; indiquez sa pente et son ordonnée à l'origine.

8. Soient $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = 3x - 2$, trouvez

a) $f(-2) + g(3)$

b) $(f+g)(x)$

c) $(f \circ g)(x)$

d) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

9. Effectuez et donnez vos réponses sous forme standard

a) $(2-3i)-(-5+7i)$

b) $(1+4i)(3-5i)$

c) $\frac{5+i}{2+3i}$

10. Soit $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 18x - 3$ et $D(x) = x + 3$.

Exprimez $P(x)$ en terme de Q(x) de la façon suivante : $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

11. Soit $P(x) = 2(x+2)(x-3)(x-5)$. Quelles sont les racines de $P(x)$?

Solutionnez les problèmes 12 à 15

12. $3x^2 = -12x$

13. $4x^2 - 20 = 0$

14. $x^2 - 6x + 2 = 0$

15. $x - \sqrt{12 - x} = 0$

16. Soit $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x - 1$. Comment peut-on savoir que $P(x)$ a une racine entre 1 et 2 ?

17. Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$. Trouvez toutes les racines rationnelles de $P(x)$.

18. Pour quelles valeurs de x est-ce que $\sqrt{2 + 3x}$ représente un nombre réel ?

19. Soit la fonction illustrée à droite.

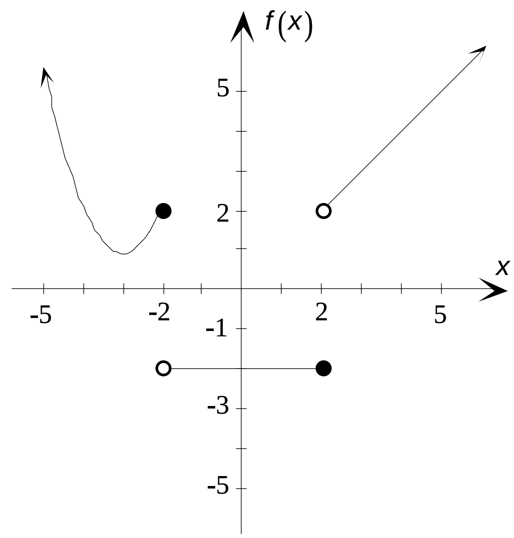
a) Quel est son domaine ?

b) Quelle est son image ?

c) $f(-3) + f(-2) + f(2) = ?$

d) Sur quel intervalle $f(x)$ est-elle croissante?

e) Quelles sont les abscisses des points de discontinuité ?



Solutionnez les problèmes 20 à 22

20. $\dfrac{x+3}{2x+2} + \dfrac{5x+2}{3x+3} = \dfrac{5}{6}$

21. $\dfrac{3}{x} = \dfrac{6}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

22. $2x + 1 = 3\sqrt{2x - 1}$

23. Soit la droite $3x + 2y = 12$ et le point $(-6,\ 1)$

a) trouvez l'équation de la droite parallèle à celle-ci et passant par ce point .

b) trouvez l'équation de la droite perpendiculaire à celle-ci et passant par ce point .

Donnez vos solutions sous la forme $y = m\,x + b$.

Solutionnez et tracez le graphe des équations 24 à 26 :

24. $|4x-9|>3$

25. $(3x+1)(x-2)\geq 2(x+2)$

26. $\sqrt{(3m-4)^2}\leq 2$ Rappel: $\sqrt{u^2}=|u|$

27. Quel est le domaine de $g(x)=\sqrt{x+4}$?

28. Pour quelles valeurs de x $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ représente-t-il un nombre réel ?

29. Effectuez et donnez la réponse sous forme standard

a) $(2-3i)^2-(4-5i)(2-3i)-(2+10i)$

b) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i+\dfrac{1}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i}$

c) i^{35}

30. Exprimez sous la forme $a+bi$

a) $(5+2\sqrt{-9})-(2-3\sqrt{-16})$

b) $\dfrac{2+7\sqrt{-25}}{3-\sqrt{-1}}$

c) $\dfrac{12-\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$

31. Tracez le graphe de la fonction $f(x)=x^2-2x-8$. Indiquez son axe de symétrie, les coordonnées de son sommet, les intersections avec les axes et sa valeur minimale.

Effectuez et simplifiez 32 à 35

32. $3xy^2\sqrt[3]{16x^5y^7}$

33. $\sqrt[5]{\dfrac{7a^3}{16b^4}}$

34. $\sqrt[3]{\sqrt{8y^9}}$

35. $\dfrac{t}{\sqrt{t+9}-3}$

36. Trouvez la fonction inverse de $f(x)=2x+5$.

37. Réécrivez les expressions suivantes sous la forme ax^p+bx^q, où a et b sont des nombres réels, et p et q sont des nombres rationnels.

a) $\dfrac{2x^3+10}{5x^2}$

b) $\dfrac{2\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}}$

38. Tracez le graphe de la fonction $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \;\; x<0 \\ x^2+1 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$.

De plus, indiquez son domaine, son image et tous les points de discontinuité.

Solutionnez les problèmes 39 à 42

39. $1+\dfrac{14}{y^2}=\dfrac{6}{y}$

40. $4x^{2/3}-4x^{1/3}-3=0$ Aide: $x^{2/3}=\left(x^{1/3}\right)^2$

41. $u^4+u^2-12=0$

42. $\sqrt{8t-2}-2\sqrt{t}=1$

43. Tracez le graphe des équations suivantes :

a) $y=2\sqrt{x}+1$

b) $y=-\sqrt{x+1}$

Utilisez la calculatrice pour évaluer les expressions 44 et 45 à deux décimales près.

44. $-3{,}45<1{,}86-0{,}33x\leq 7{,}92$

45. $2{,}35x^2+10{,}44x-16{,}47=0$

46. Solutionnez pour y en termes de x : $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2y+1}{y-2}$

47. Soit $f(x)=\sqrt{x+4}.$

a) Trouvez $f^{-1}(x)$.

b) Trouvez le domaine et l' image de f et de $f^{-1}(x)$..

c) Sur un même système de coordonnées, tracez les graphes de f, de f^{-1} et de $y=x$.

48. Evaluez x^2-x-1 pour $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

49. Evaluez x^2-x+2 pour $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\sqrt{7}$

50. Simplifiez $(x+1)^3-(x-1)^3$

51. Pour quelles valeurs de a et de b l'inégalité $a-b<b-a$ est-elle vérifiée ?

52. Factorisez relativement aux nombres entiers $9b^4-16b^2(a^2-2a+1)$

53. Simplifiez $\dfrac{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+m}}}{\dfrac{m}{2-m}+\dfrac{m}{2+m}}$

54. Trouvez le centre et le rayon du cercle défini par l'équation $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$.

55. Solutionnez pour y en termes de x $\dfrac{x+y}{y-\dfrac{x+y}{x-y}} = 1$

56. Trouvez toutes les racines de $3x^2 = 2\sqrt{2}x - 1$

57. Trouvez toutes les racines de $1 = 6x^{-2} + 9x^{-4}$

58. Simplifiez en n'utilisant que des exposants positifs

a) $(a^{1/4} - b^{1/4})(a^{1/4} + b^{1/4})(a^{1/2} + b^{1/2})$

b) $\left(\dfrac{x^{-1}y + xy^{-1}}{xy^{-1} - x^{-1}y}\right)^{-1}$

59. Lesquels des polynômes suivants sont facteurs de $P(x) = x^{25} - x^{20} + x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$?

a) $x - 1$

b) $x + 1$

60. Factorisez $P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 15x - 12$.

61. Rationnalisez le numérateur de $\dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$

Aide: $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

62. Reformulez sous forme standard : $\dfrac{a+bi}{a-bi}$, $a,b \neq 0$

63. Simplifiez $\sqrt[n]{\left(\dfrac{x^{2n^2}}{x^{4n}}\right)^{1/(n-2)}}$, $n > 2$

RÉPONSES

1. $x = \dfrac{5}{2}$

2. a) $2\sqrt{5}$

b) $m = 2$

c) $m_1 = -\dfrac{1}{2}$

3. a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$

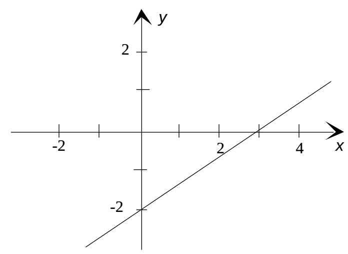
4. $y \geq 5$ $[5,\ \infty)$ **5.** $-5 < x < 9$ $(-5,\ 9)$

6. $x \leq -5$ *ou* $x \geq 2$: $(-\infty,\ -5]$ $[2,\ \infty)$

7. pente : $\frac{2}{3}$

intersection avec l'ordonnée : $y = -2$ i

ntersection avec l'abcisse : $x = 3$



8. a) 20 b) $x^2 + x + 3$

c) $9x^2 - 18x + 13$ d) $2a + h - 2$

9. a) $7 - 10i$ b) $23 + 7i$

c) $1 - i$

10. $3x^4 + 5x^2 - 18x - 3 = (x+3)(3x^2 - 4x - 6) + 15$ **11.** $-2,\ 3,\ 5$

12. $x = 0\ ,\ -4$ **13.** $x = \pm\sqrt{5}$

14. $x = 3 \pm \sqrt{7}$ **15.** $x = 3$

16. $P(1) = -5$ *et* $P(2) = 5$ **17.** $1,\ 2,\ -4$

18. $x \geq -\frac{2}{3}$ ou $\left[-\frac{2}{3},\ \infty\right)$

19. a) Tous les nombres réels : $(-\infty,\ \infty)$ b) $\{-2\}$ $[1,\ \infty)$

c) 1 d) $[-3,\ -2]$ *et* $[2,\ \infty)$

e) $-2,\ 2$.

20. Aucune solution : –1 est exclu. **21.** $x = \frac{1}{2},\ 3$

22. $x = \frac{5}{2},\ 1$

23. a) $y = -\frac{3}{2}x - 8$ b) $y = \frac{2}{3}x + 5$

24. $x < \frac{3}{2}$ ou $x > 3$. Donc $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right) \quad (3,\ \infty)$.

25. $x \le \frac{-2}{3}$ ou $x \ge 3$

26. $\frac{2}{3} \le m \le 2 \quad \left[\frac{2}{3},\ 2\right]$

27. $[-4,\ \infty)$

28. $x \ge 2,\ x \ne 4\ :\ [2,\ 4) \quad (4,\ \infty)$

29. a) $0 + 0i$ *ou* 0 b) $\frac{6}{5}$

c) $i^{35} = i^{32}i^3 = \left(i^4\right)^8(-i) = 1^8(-i) = -i$

30. a) $3 + 18i$ b) $-2{,}9 + 10{,}7i$

c) $-4 - 6i$

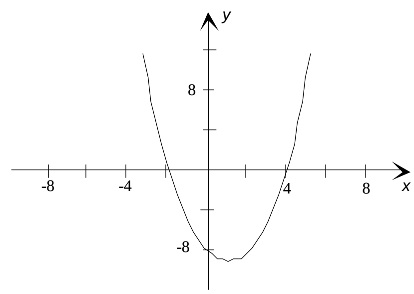
31. Le minimum de la fonction est

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{-2}{2}\right) = f(1) = 1^2 - 2\ 1 - 8 = -9$

$\mathrm{Im}(f) = [-9,\ \infty)$

Intersection avec l'ordonnée y : $f(0) = -8$

Intersections avec l'abcisse x : $x = 4$ ou $x = -2$



32. $6x^2y^4\sqrt[3]{2x^2y}$

33. $\frac{\sqrt[5]{14a^3b}}{2b}$

34. $y\sqrt{2y}$

35. $\sqrt{t+9} + 3$

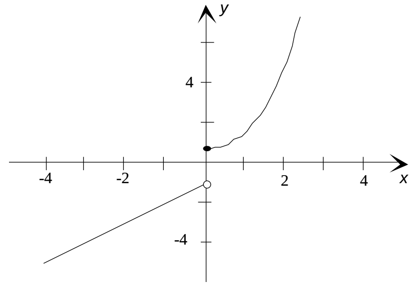
36. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ *ou* $\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

37. a) $\frac{2}{5}x + 2x^{-2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{5}{4}x^{-1/2}$ *ou* $\frac{1}{2}x^0 - \frac{5}{4}x^{-1/2}$

38. Domaine: tous des nombres réels

Image: $(-\infty,\ -1)\quad [1,\ \infty)$

discontinue en $x = 0$



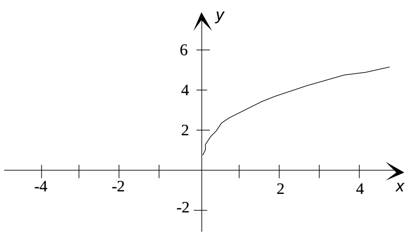
39. $y = 3 \pm \sqrt{-5},\ \ y = 3 \pm i\sqrt{5}$

40. $x = \dfrac{27}{8}\ ,\ -\dfrac{1}{8}$

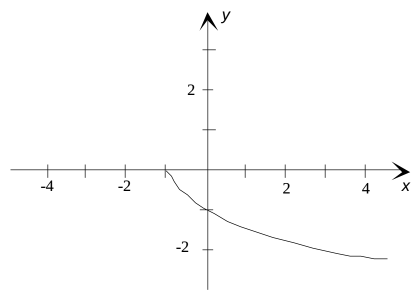
41. $u = \pm 2i\ \ ,\ \pm\sqrt{3}$

42. $t = \dfrac{9}{4}$

43. a)



b)



44. $-18{,}36 \le x < 16{,}09\ :\ [-18{,}36\ ,\ 16{,}09)$

45. $-5{,}68$ et $1{,}23$

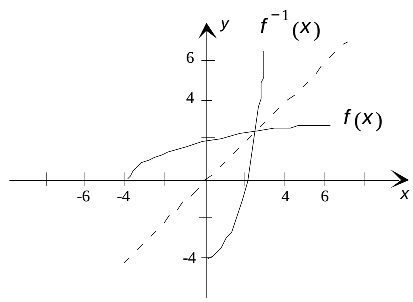
46. $y = \dfrac{3 - 3x}{x + 4}$

47. a) $f^{-1}(x) = x^2 - 4\ ,\ x \ge 0$

b) Domaine de f et image de f^{-1} : $[-4, \infty)$

Domaine de f^{-1} et image de f : $[0, \infty)$

(C)



48. 0

49. 0

50. $6x^2 + 2$

51. Il faut $a < b$

52. $b^2(3b - 4a + 4)(3b + 4a - 4)$

53. $\dfrac{2 - m}{4m}$

54. Centre : $(3,\ -1)$ Rayon : $\sqrt{10}$

55. $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$

56. $x = \dfrac{\sqrt{2} \pm i}{3}$

57. $x = \pm\sqrt{3 + 3\sqrt{2}}$

58. a) $a - b$

b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

59. $x + 1$ est un facteur de $P(x)$ car $P(-1) = 0$

60. $P(x) = (x+1)(x+4)\left(x^2 - 3\right) = (x+1)(x+4)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

61. $\dfrac{1}{(8+h)^{2/3} + 2(8+h)^{1/3} + 4}$

62. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}\, i$

63. x^2