CHAPITRE 2 POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

2-1 LES POLYNÔMES; OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

Une **expression algébrique** est soit une constante, soit une variable, soit une combinaison de constantes, de variables et d'un nombre fini d'opérations élémentaires comme l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'exponentiation ou l'extraction de racines.

Un **monôme** est un terme composé soit d'une constante, soit d'un produit d'une ou plusieurs variables affectées d'exposants entiers positifs ou nuls. Il s'agit donc d'expressions de la forme ax^n ou ax^ny^m, etc… dans lesquelles a est une constante, x, y, etc… sont les variables et n et m sont les exposants positifs. Un **polynôme** est soit un monôme, soit une somme de monômes.

Le **degré d'un terme** (d'un monôme) est la somme des puissances de toutes les variables du terme, et le **degré d'un polynôme** est le degré du terme non nul de plus haut degré dans le polynôme. Les polynômes à un terme, deux termes et trois termes sont appelés respectivement **monômes**, **binômes** et **trinômes**. Les **termes semblables** ont exactement les mêmes variables à la même puissance et peuvent être regroupés en additionnant leur **coefficient**.

Exemple 2-1.1 Les expressions $x^3 + 4x - 8$ et $x^6y^3z + xy - xz^2 + 5xyz$ sont des polynômes, de degrés 3 et 10 respectivement; par contre les expressions $x^4 + \sqrt{7x} + 11$ et $\dfrac{x^3 - x + 1}{x + 13}$ n'en sont pas.

Si vous retournez voir les exercices du chapitre 1, vous constaterez que certains d'entre eux portaient sur des polynômes. On constate qu'on peut effectuer sur ceux-ci les mêmes opérations d'addition, de soustraction et de multiplication que sur les nombres réels en appliquant la distributivité et le regroupement des termes semblables.

En s'inspirant de la division de deux entiers, on peut également procéder à la division de deux polynômes à une variable.

Exemple 2-1.2 $$\underbrace{2x^3+5x^2+7x+8}_{\textbf{dividende}\ \uparrow} \;\Big|\; \underbrace{2x+3}_{\textbf{diviseur}\ \uparrow}$$

On écrit les deux polynômes selon l'ordre décroissant des puissances de la variable.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3+5x^2+7x+8 & 2x+3 \\
\cline{3-3}
- & \underline{2x^3+3x^2} & x^2+x+2 \quad \leftarrow \textbf{quotient} \\
 & 2x^2+7x+8 & \\
- & \underline{2x^2+3x} & \\
 & 4x+8 & \\
- & \underline{4x+6} & \\
 & 2 \quad \leftarrow \textbf{reste} &
\end{array}
$$

On peut donc écrire $\dfrac{2x^3+5x^2+7x+6}{2x+3} = x^2+x+2+\dfrac{2}{2x+3}$

Cette dernière expression peut être plus simple à utiliser et à analyser.

Si nous avons deux polynômes (à 1 variable), $p(x)$ le dividende et $s(x)$ le diviseur, et si degré$[p(x)] \geq$ degré$[s(x)]$, alors par la division on aura

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)} \quad \text{ou bien} \quad p(x) = q(x)\cdot s(x) + r(x).$$

Dans le dernier exemple, la forme précédente nous permettrait d'écrire:

$$2x^3+5x^2+7x+8 = (x^2+x+2)\cdot(2x+3) + 2.$$

Nous reverrons ces notions plus en détails dans le chapitre 4.

2-2 *FACTORISATION DE POLYNÔMES*

Nous avons vu comment multiplier deux polynômes, par exemple $(2x+3)(x-4)$ et on obtient comme résultat $2x^2 - 5x - 12$ (Vérifiez-le!). Il est cependant plus fréquent que nous ayons à faire l'opération inverse, c'est-à-dire exprimer un polynôme comme le produit de deux ou plusieurs polynômes plus simples (appelés **facteurs**). On parle alors de factoriser un polynôme (ou de déterminer la factorisation d'un polynôme). Nous ne considérerons dans cette section que les cas les plus simples et nous reviendrons au chapitre 4 sur une généralisation de ces concepts.

Les **facteurs communs** peuvent se mettre en facteur en appliquant la distributivité. Le **regroupement** peut être utilisé afin d'identifier des facteurs communs.

Exemple 2-2.1 La factorisation de l'expression polynomiale $2x^2+6x+5x+15$ se fait comme suit:

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+5x+15 &= 2x(x+3)+5(x+3) \\ &= (2x+5)(x+3) \end{aligned}$$

Les polynômes de degré deux, à coefficients entiers, peuvent parfois (ce n'est pas toujours le cas) être factorisés par essai et erreur. On remarque en effet que $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Exemple 2-2.2 Pour factoriser le polynôme du second degré $x^2-2x-35$ on procède comme suit:

$$x^2-2x-35=(x+?)(x+??)$$

On cherche deux valeurs telles que leur produit donne -35 et leur somme donne -2. On trouve les valeurs -7 et 5, ce qui donne

$$x^2-2x-35=(x+5)(x-7)$$

Les factorisations suivantes donnent des formules utilisées fréquemment:

1. $u^2+2uv+v^2=(u+v)^2$ — Carré parfait
2. $u^2-2uv+v^2=(u-v)^2$ — Carré parfait
3. $u^2-v^2=(u+v)(u-v)$ — Différence de carrés
4. $u^3-v^3=(u-v)(u^2+uv+v^2)$ — Différence de cubes
5. $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$ — Somme de cubes

Il n'y **pas de factorisation possible** dans les nombres réels pour l'expression u^2+v^2 .

Exemple 2-2.3 a) $4t^2-9=(2t+3)(2t-3)$

b) $x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)$
$\quad = x(x-3)^2$

c) $8y^3-27x^6$

En posant $u=2y$ et $v=3x^2$, on obtient $u^3-v^3=(u-v)(u^2+uv+v^2)$:

$8y^3-27x^6 = (2y-3x^2)(4y^2+6x^2y+9x^4)$

Attention! $x^2+4 \neq (x+2)^2$

En effet, $(x+2)^2 = x^2+\underline{4x}+4$!! Il faut éviter de faire cette erreur, peu importe le contexte. Par exemple, $\sqrt{x^2+4} \neq x+2$. Pourquoi??

Lorsqu'on demande de factoriser un polynôme par rapport à un ensemble de nombres, on veut que les coefficients numériques des facteurs du polynôme fassent partie de cet ensemble de nombres. Par exemple, si cet ensemble est les entiers, alors $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ peut se factoriser car les coefficients de $(x-2)(x-3)$ sont entiers. Par contre, $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ est une différence de carrés, mais $\sqrt{3}$ n'étant pas un entier, x^2-3 ne peut pas se factoriser par rapport aux nombres entiers. À moins d'indication contraire, on suppose que l'ensemble de référence est les nombres réels.

2-3 *FRACTIONS RATIONNELLES*

Lorsqu'une expression algébrique se présente comme le quotient de deux expressions algébriques, on dit que l'on a une **expression fractionnaire**. De plus, lorsque l'expression fractionnaire se présente sous la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes et où $Q \neq 0$, on dit que l'on a une **fraction rationnelle**.

Les règles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des fractions de nombres réels (voir la section 1-1 de ce texte) s'appliqueront toutes aux fractions rationnelles, étant bien entendu que les **variables sont restreintes afin d'éviter la division par zéro**.

Une opération mathématique courante consiste à simplifier de telles fractions en des fractions équivalentes plus simples. Comme avec les fractions numériques, si le numérateur et le dénominateur contiennent un même facteur commun, on peut simplifier ce facteur pour obtenir une fraction plus simple:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \qquad \text{avec } b, k \neq 0$$

Exemple 2-3.1 $$\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x-2}$$

Une fraction est dite simplifiée si le numérateur et le dénominateur n'ont plus de facteurs communs simplifiables.

Le **plus petit dénominateur commun** (ppdc) sert à additionner et soustraire des fractions qui n'ont pas le même dénominateur et à réduire des **fractions complexes** en **fractions simples**.

Exemple 2-3.2 a) $\dfrac{2x+1}{2(x+2)} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{(2x+1)(x+2) - 3x^2 \cdot 2}{2(x+2)^2}$

$$= \frac{2x^2 + 5x + 2 - 6x^2}{2(x+2)^2} = \frac{-4x^2 + 5x + 2}{2(x+2)^2}$$

b) $\dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{3}{5-x} = \dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{-3}{x-5} = \dfrac{x+1}{x-5}$

Avant de simplifier un facteur, il faut s'assurer qu'il est bien facteur du numérateur et du dénominateur. Par exemple, $\dfrac{4x^3 - y^2}{y^2} \neq 4x^3$; en effet, y^2 n'est pas un facteur du numérateur; le facteur y^2 du dénominateur doit diviser tous les termes du numérateur. L'expression est déjà sous sa forme simplifiée. Par contre, $\dfrac{4y^3 - y^2}{y^2} = \dfrac{y^2\,(4y-1)}{y^2} = 4y - 1$.

Lorsqu'on a des fractions plus complexes, il faut appliquer l'ensemble des recommandations précédentes mais en y allant étape par étape.

Exemple 2-3.3 a) Exprimons sous sa forme la plus simple l'expression fractionnaire

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{ab}}{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab}} = \frac{a^2 - b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}$$

b) $\dfrac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} = \dfrac{\frac{2 \cdot x - 2(x+h)}{x\,(x+h)}}{h/1} = \dfrac{2x - 2x - 2h}{x\,(x+h)} \cdot \dfrac{1}{h} = \dfrac{-2h}{x \cdot h\,(x+h)} = \dfrac{-2}{x\,(x+h)}$

2-4 *RATIONALISATION DE FRACTIONS*

Considérons la situation suivante: après un certain calcul, vous obtenez le résultat $\dfrac{8}{3-\sqrt{7}}$ alors que votre copain, lui, obtient $12 + 4\sqrt{7}$. Même si cela n'est pas évident au premier coup d'oeil, vous avez tous les deux le même résultat mais sous des formes équivalentes. (Prenez votre calculatrice et évaluez les 2 expressions!!)

Pour comprendre pourquoi, il faut se rappeler ce qu'on a vu à la section 1-3. En effet, on évite en général de laisser au dénominateur un terme contenant des radicaux. Dans l'expression $\dfrac{8}{3-\sqrt{7}}$, par quel terme doit-on multiplier le numérateur et le dénominateur pour faire disparaître le radical? En se rappelant que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, on aura

$$\frac{8}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{24+8\sqrt{7}}{9-7} = 12+4\sqrt{7}.$$

Le facteur $3+\sqrt{7}$ est appelé le **facteur rationalisant**. On peut appliquer le même raisonnement à une expression algébrique fractionnaire où un radical apparaît au dénominateur. Comme plus haut, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par un même facteur rationalisant qui est obtenu en général par les produits remarquables (différence de carrés ou de cubes)

Exemple 2-4.1 Rationalisez le dénominateur de la fraction

$$\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+3} \; \frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-3} = \frac{2x-6+\sqrt{x}}{4x-9}$$

Ici, le facteur rationalisant est $2\sqrt{x}-3$. Lorsque le terme au dénominateur contient une racine carrée, on dit que le facteur rationalisant est le **conjugué** de notre dénominateur. Par exemple, si on a $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, alors le conjugué sera $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. (Cette appellation de conjugué est un clin d'oeil aux nombres complexes que nous verrons au prochain chapitre.)

Exemple 2-4.2 $$\frac{2}{\sqrt[3]{t}-3} = \frac{2}{t^{1/3}-3} \qquad \frac{2}{\sqrt[3]{t}-3} = \frac{2}{t^{1/3}-3}$$

Si on pose $u = t^{1/3}$, alors on obtient $u^3 = t$.

En se rappelant que $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$, on aura (avec $v = 3$):

$$\frac{2}{t^{1/3}-3} \cdot \frac{t^{2/3}+3t^{1/3}+9}{t^{2/3}+3t^{1/3}+9} = \frac{2\,(t^{2/3}+3t^{1/3}+9)}{t-27}$$

2-5 EXERCICES

Les problèmes 1-4 font référence aux polynômes suivants:

(a) $3x - 4$ *(b)* $x + 2$ *(c)* $3x^2 + x - 8$ *(d)* $x^3 + 8$

1. Additionnez les 4 polynômes.

2. Soustrayez la somme de (a) et (c) de la somme de (b) et (d).

***3.** Multipliez (c) et (d).

4. Quel est le degré de (d)?

5. Effectuez les divisions suivantes et donnez vos réponses sous la forme $\frac{P}{S} = Q + \frac{R}{S}$.

a) $\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{2x + 3}$ b) $\dfrac{-2a^2 + 29a - a^3 - 40}{-3 + a}$ c) $\dfrac{9z^4 + 60z^2 + 96}{3z^2 + 8}$

d) $\dfrac{x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^2 - 1}$ e) $\dfrac{-13s + 4s^3 - 5}{2s + 1}$

Dans les problèmes 6 à 13, mettez en évidence tous les facteurs qui sont communs à tous les termes.

***6.** $6x^4 - 8x^3 - 2x^2$ **7.** $6m^4 - 9m^3 - 3m^2$ **8.** $10x^3y + 20x^2y^2 - 15xy^3$

9. $8u^3v - 6u^2v^2 + 4uv^3$ ***10.** $5x(x + 1) - 3(x + 1)$ **11.** $7m(2m - 3) + 5(2m - 3)$

12. $2w(y - 2z) - x(y - 2z)$ **13.** $a(3c + d) - 4b(3c + d)$

Dans les problèmes 14 à 52, factorisez complètement relativement aux nombres entiers. Si un polynôme est premier relativement aux nombres entiers, dites-le.

***14.** $x^2 - 2x + 3x - 6$ **15.** $2y^2 - 6y + 5y - 15$ **16.** $6m^2 + 10m - 3m - 5$

17. $5x^2 - 40x - x + 8$ **18.** $2x^2 - 4xy - 3xy + 6y^2$ **19.** $3a^2 - 12ab - 2ab + 8b^2$

20. $8ac + 3bd - 6bc - 4ad$ **21.** $3pr - 2qs - qr + 6ps$ ***22.** $2x^2 + 5x - 3$

23. $3y^2 - y - 2$ ***24.** $x^2 - 4xy - 12y^2$ **25.** $u^2 - 2uv - 15v^2$

***26.** $x^2 + x - 4$ **27.** $m^2 - 6m - 3$ **28.** $25m^2 - 16n^2$

29. $w^2x^2 - y^2$ **30.** $x^2 + 10xy + 25y^2$ **31.** $9\mathrm{m}^2 - 6mn + n^2$

32. $u^2 + 81$ **33.** $y^2 + 16$ **34.** $6x^2 + 48x + 72$

35. $4z^2 - 28z + 48$ ***36.** $2y^3 - 22y^2 + 48y$ **37.** $2x^4 - 24x^3 + 40x^2$

38. $16x^2y - 8xy + y$ **39.** $4xy^2 - 12xy + 9x$ **40.** $6s^2 + 7st - 3t^2$

41. $6m^2 - mn - 12n^2$ ***42.** $x^3y - 9xy^3$ **43.** $4u^3v - uv^3$

44. $3m^3 - 6m^2 + 15m$ **45.** $2x^3 - 2x^2 + 8x$ ***46.** $m^3 + n^3$

47. $r^3 - t^3$ **48.** $c^3 - 1$ **49.** $a^3 + 1$

50. $9x^2 - 12x + 4$ **51.** $t^2 - 4t - 6$ **52.** $6n^3 - 9n^2 - 15n$

Mettez en évidence tous les facteurs communs puis factorisez complètement les expressions 53 à 58 relativement aux entiers.

***53.** $6(3x-5)(2x-3)^2 + 4(3x-5)^2(2x-3)$

54. $2(x-3)(4x+7)^2 + 8(x-3)^2(4x+7)$

55. $5x^4(9-x)^4 - 4x^5(9-x)^3$

56. $3x^4(x-7)^2 + 4x^3(x-7)^3$

57. $2(x+1)(x^2-5)^2 + 4x(x+1)^2(x^2-5)$

58. $4(x-3)^3(x^2+2)^3 + 6x(x-3)^4(x^2+2)^2$

Dans les problèmes 59 à 62, effectuez et présentez la réponse sous forme réduite.

***59.** $\dfrac{2}{5b} - \dfrac{4}{3a^3} - \dfrac{1}{6a^2b^2}$

60. $\dfrac{3x}{3x^2-12x} + \dfrac{1}{6x}$

61. $\dfrac{y-2}{y^2-4y+4} \div \dfrac{y^2+2y}{y^2+4y+4}$

***62.** $\dfrac{u-\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}$

***63.** Simplifiez $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

64. Soient les expressions algébriques suivantes :

(a) $2x^2 - 3x + 5$ (b) $x^2 - \sqrt{x-3}$ (c) $x^{-3} + x^{-2} - 3x^{-1}$ (d) $x^2 - 3xy - y^2$

(A) Identifiez tous les polynômes de second degré.

(B) Identifiez tous les polynômes de troisième degré.

(C) Donnez une forme équivalente à celle de (c), qui ne contienne pas d'exposants négatifs.

Dans les problèmes 65 à 71, factorisez relativement aux nombres entiers.

65. $(4x-y)^2 - 9x^2$

66. $2x^2 + 4xy - 5y^2$

67. $6x^3y + 12x^2y^2 - 15xy^3$

***68.** $(y-\mathrm{b})^2 - y + \mathrm{b}$

69. $3x^3 + 24y^3$

70. $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$

71. $2x(x-4)^3 + 3x^2(x-4)^2$

Factorisez complètement relativement aux entiers. Si un polynôme est premier relativement aux nombres entiers, dites-le.

72. $(a-b)^2 - 4(c-d)^2$

73. $(x+2)^2 - 9y^2$

74. $2am - 3an + 2bm - 3bn$

75. $15ac - 20ad + 3bc - 4bd$

76. $3x^2 - 2xy - 4y^2$

77. $5u^2 + 4uv - 2v^2$

78. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ **79.** $x^3 - x^2 - x + 1$ **80.** $a^3 - 2a^2 - a + 2$

81. $t^3 - 2t^2 + t - 2$ ***82.** $4(A + B)^2 - 5(A + B) - 6$ **83.** $6(x - y)^2 + 23(x - y) - 4$

84. $m^4 - n^4$ **85.** $y^4 - 3y^2 - 4$ **86.** $s^4t^4 - 8st$

87. $27a^2 + a^5b^3$ **88.** $m^2 + 2mn + n^2 - m - n$ **89.** $y^2 - 2xy + x^2 - y + x$

***90.** $18a^3 - 8a(x^2 + 8x + 16)$ **91.** $25(4x^2 - 12xy + 9y^2) - 9a^2b^2$ **92.** $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

93. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

Dans les problèmes 94 à 98, effectuez et simplifiez; donnez la réponse sous forme d'une seule fraction simplifiée.

94. $\dfrac{3x^2(x+2)^2 - 2x(x+2)^3}{x^4}$ ***95.** $\dfrac{m-1}{m^2 - 4m + 4} + \dfrac{m+3}{m^2 - 4} + \dfrac{2}{2-m}$

96. $\dfrac{y}{x^2} \div \left(\dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 + 5x - 3} \div \dfrac{x^3y - x^2y}{2x^2 - 3x + 1} \right)$ **97.** $\dfrac{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{y}}}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{y}}}$ ***98.** $\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{ab^{-2} - ba^{-2}}$

Dans les problèmes 99 à 101, effectuez et simplifiez

99. $\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **100.** $\dfrac{2\sqrt{u} - 3\sqrt{v}}{2\sqrt{u} + 3\sqrt{v}}$ **101.** $\dfrac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4} - 2}$

102. Rationalisez le numérateur: $\dfrac{\sqrt{t} - \sqrt{5}}{t - 5}$

***103.** Réécrivez sous la forme $ax^p + bx^q$ où a et b sont des nombres réels, p et q sont rationnels: $\dfrac{4\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}}$

***104.** Evaluez $x^2 - 4x + 1$ avec $x = 2 - \sqrt{3}$ **105.** Simplifiez : $x(2x - 1)(x + 3) - (x - 1)^3$

106. Factorisez

$$4x\left(a^2 - 4a + 4\right) - 9x^3$$

107. Simplifiez :

$$\left(x - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) \div \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x}\right)$$

Dans les problèmes 108 à 111, simplifiez et donnez vos réponses en utilisant des exposants positifs (m est un entier plus grand que 1).

108. $$\frac{8(x-2)^{-3}(x+3)^2}{12(x-2)^{-4}(x+3)^{-2}}$$

109. $$\left(\frac{a^{-2}}{b^{-1}} + \frac{b^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-1}$$

110. $$\left(x^{1/3} - y^{1/3}\right)\left(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}\right)$$

111. $$\left(\frac{x^{m^2}}{x^{2m-1}}\right)^{1/(m-1)} \qquad m > 1$$

112. Rationalisez le dénominateur $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$

113. Rationalisez le numérateur $\dfrac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{5}}{t-5}$

***114.** Simplifiez $\sqrt[n+1]{x^{n^2} x^{2n+1}}$ $\qquad n > 0$

CHAPITRE 2 - RÉPONSES

1. $x^3 + 3x^2 + 5x - 2$

2. $x^3 - 3x^2 - 3x + 22$

3. $3x^5 + x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 8x - 64$

4. 3

5. a) $x^2 + x + 2 + \dfrac{0}{2x+3}$ b) $-a^2 - 5a + 14 + \dfrac{2}{-3+a}$ c) $3z^2 + 12 + \dfrac{0}{3z^2+8}$

d) $x^2 + x + 1 + \dfrac{-x+6}{x^2-1}$ e) $2s^2 - s - 6 + \dfrac{1}{2s+1}$

6. $2x^2(3x^2 - 4x - 1)$

7. $3m^2(2m^2 - 3m - 1)$

8. $5xy(2x^2 + 4xy - 3y^2)$

9. $2uv(4u^2 - 3uv + 2v^2)$

10. $(x+1)(5x-3)$

11. $(2m-3)(7m+5)$

12. $(y-2z)(2w-x)$

13. $(3c+d)(a-4b)$

14. $(x+3)(x-2)$

15. $(2y+5)(y-3)$

16. $(3m+5)(2m-1)$

17. $(5x-1)(x-8)$

18. $(2x-3y)(x-2y)$

19. $(3a-2b)(a-4b)$

20. $(2c-d)(4a-3b)$

21. $(r+2s)(3p-q)$

22. $(2x-1)(x+3)$

23. $(3y+2)(y-1)$

24. $(x-6y)(x+2y)$

25. $(u-5v)(u+3v)$

26. ne se décompose pas

27. ne se décompose pas

28. $(5m-4n)(5m+4n)$

29. $(wx-y)(wx+y)$

30. $(x+5y)^2$

31. $(3m-n)^2$

32. ne se décompose pas

33. ne se décompose pas

34. $6(x+6)(x+2)$

35. $4(z-3)(z-4)$

36. $2y(y-8)(y-3)$

37. $2x^2(x-10)(x-2)$

38. $y(4x-1)^2$

39. $x(2y-3)^2$

40. $(2s+3t)(3s-t)$

41. $(2m-3n)(3m+4n)$

42. $xy(x-3y)(x+3y)$

43. $uv(2u-v)(2u+v)$

44. $3m(m^2 - 2m + 5)$

45. $2x(x^2 - x + 4)$

46. $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$

47. $(r-t)(r^2 + rt + t^2)$

48. $(c-1)(c^2 + c + 1)$

49. $(a+1)(a^2 - a + 1)$

50. $\left(3x-2\right)^2$

51. $t^2 - 4t - 6$

52. $3n\left(2n-5\right)\left(n+1\right)$

53. $2(3x-5)(2x-3)(12x-19)$

54. $2(x-3)(4x+7)(8x-5)$

55. $9x^4(9-x)^3(5-x)$

56. $7x^3(x-4)(x-7)^2$

57. $2(x+1)(x^2-5)(x-1)(3x+5)$

58. $2(x-3)^3(x^2+2)^2(x-1)(5x-4)$

59. $\dfrac{12a^3b - 40b^2 - 5a}{30a^3b^2}$

60. $\dfrac{7x-4}{6x(x-4)}$

61. $\dfrac{y+2}{y(y-2)}$

62. u

63. $\dfrac{3\sqrt{5}+5}{4}$

64. (A) a et d (B) *Aucun* (C) $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}$

65. $(x-y)(7x-y)$

66. Inchangé: $2x^2+4xy-5y^2$

67. $3xy\left(2x^2+4xy-5y^2\right)$

68. $(y-b)(y-b-1)$

69. $3(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$

70. $(y-2)(y+2)^2$

71. $x(x-4)^2(5x-8)$

72. $(a-b-2c+2d)(a-b+2c-2d)$

73. $(x+2-3y)(x+2+3y)$

74. $(2m-3n)(a+b)$

75. $(5a+b)(3c-4d)$

76. ne se décompose pas

77. ne se décompose pas

78. $(x-3)^2(x+3)$

79. $(x-1)^2(x+1)$

80. $(a-2)(a-1)(a+1)$

81. $(t-2)(t^2+1)$

82. $(A+B-2)(4A+4B+3)$

83. $(x-y+4)(6x-6y-1)$

84. $(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$

85. $(y-2)(y+2)(y^2+1)$

86. $st(st-2)(s^2t^2+2st+4)$

87. $a^2(3+ab)(9-3ab+a^2b^2)$

88. $(m+n)(m+n-1)$

89. $(y-x)(y-x-1)$

90. $2a(3a-2x-8)(3a+2x+8)$

91. $[5(2x-3)-3ab]\cdot[5(2x-3)+3ab]$

92. $(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

93. $(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

94. $\dfrac{(x+2)^2(x-4)}{x^3}$

95. $\dfrac{2m}{(m-2)^2(m+2)}$

96. $\dfrac{y^2}{x}$

97. $\dfrac{x-y}{x+y}$

98. $\dfrac{-ab}{a^2+ab+b^2}$

99. $\dfrac{6x+3\sqrt{xy}}{4x-y}$

100. $\dfrac{4u-12\sqrt{uv}+9v}{4u-9v}$

101. $\sqrt{y^2+4}+2$

102. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{5}}$

103. $2x^0-\dfrac{3}{2}x^{-1/2}=2-\dfrac{3}{2}x^{-1/2}$

104. 0

105. x^3+8x^2-6x+1

106. $x(2a+3x-4)(2a-3x-4)$

107. $\dfrac{(x-2)(x+1)}{2x}$

108. $\dfrac{2}{3}(x-2)(x+3)^4$

109. $\dfrac{a^2b^2}{a^3+b^3}$

110. $x-y$

111. x^{m-1}

112. $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-x}$

113. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{5t}+\sqrt[3]{25}}$

114. x^{n+1}

RÉVISION : EXERCICES SUR LES CHAPITRES 1 ET 2.

1. Remplacez le point d'interrogation par l'expression appropriée illustrant la règle mentionnée.

a) Distributivité: $c(a+b) = ?$

b) Associativité(+): $(a+b)+c = ?$

c) Commutativité (·): (a + b)c = ?

Effectuez et simplifiez les problèmes 2 à 6 :

2. $4x(x-3)+2(3x+5)$

3. $3x(x-7)-(5x-9)$

4. $(2x-5y)(3x+4y)$

5. $(2a-3b)(2a+3b)$

6. $(5m+2n)^2$

Factorisez complètement relativement aux nombres entiers les polynômes des problèmes 7 et 8,

7. $x^2-3x+10$

8. $6t^2+7t-5$

Effectuez et ramenez sous forme réduite les expressions 9 et 10 :

9. $\dfrac{6}{x^2-3x}-\dfrac{4}{x^2-2x}$

10. $\dfrac{\dfrac{4}{y}-y}{\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{1}{2}}$

Simplifiez les expressions 11 à 13 et donnez vos réponses en n'utilisant que des exposants positifs.

11. $3x^2(xy^2)^5$

12. $\dfrac{(2xy^2)^3}{4x^4y^4}$

13. $(a^4b^{-6})^{3/2}$

14. Exprimez $5a^{3/4}$ à l'aide de radicaux

15. Exprimez $2\sqrt[5]{x^2y^3}$ à l'aide d'exposants fractionnaires

Simplifiez les problèmes 16 à 18 :

16. $xy^2\sqrt[3]{x^4y^8}$

17. $\sqrt{2xy^3}\sqrt{6x^2y}$

18. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$

19. Réécrivez en extension l'ensemble $\{x \mid x \text{ est un facteur premier de } 60\}$.

20. Vrai ou faux ?

a) Si $ab = 1$, alors $a = 1$ ou $b = 1$ ou les deux.

b) Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ ou les deux.

c) Un nombre réel à développement décimal périodique est un nombre irrationnel.

21. Indiquez parmi les expressions algébriques suivantes lesquelles sont des polynômes; donnez leur degré.

a) $5x^2 - \sqrt{3}\;x + 7$

b) $4y^3 + \sqrt{5y} - 11$

c) $3x^2 + 2x^2y^2 + 5y^3$

d) $2x^{-2} + 3x^{-1} - 4$

Effectuez et simplifiez 22 à 24 :

22. $(a+2b)(2a+b)-(a-2b)(2a-b)$

23. $3(x+h)^2 - 4(x+h) - (3x^2 - 4x)$

24. $(4m+3n)^3$

Factorisez complètement relativement aux nombres entiers les expressions 25 à 27 :

25. $(2y+4)^2 - y^2$

26. $a^3 + 3a^2 - 4a - 12$

27. $3x^4(x+1)^2 + 4x^3(x+1)^3$

Effectuez et simplifiez les expressions 28 à 30 :

28. $$\frac{-3x^4(x+1)^2 + 4x^3(x+1)^3}{(x+1)^6}$$

29. $$\frac{2a+4b}{(a^2-b^2)} + \frac{3a}{a^2-3ab+2b^2} - \frac{3b}{a^2-ab-2b^2}$$

30. $$\frac{2-\dfrac{4}{2-\dfrac{x}{y}}}{2-\dfrac{4}{2+\dfrac{x}{y}}}$$

31. Evaluez à quatre chiffres significatifs :

a) $0{,}9274^{23}$

b) $\sqrt[7]{12{,}47}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}+4}$

d) $$\frac{(52\ 180\ 000\ 000)(0{,}000\ \ 000\ 002\ 973)}{0{,}000\ \ 000\ 000\ 000\ 271}$$

RÉPONSES

1. a) $ca + cb$ b) $a + (b + c)$

c) $c(a + b)$

2. $4x^2 - 6x + 10$

3. $3x^2 - 26x + 9$

4. $6x^2 - 7xy - 20y^2$

5. $4a^2 - 9b^2$

6. $25m^2 + 20mn + 4n^2$

7. Inchangé: $x^2 - 3x + 10$

8. $(3t + 5)(2t - 1)$

9. $\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}$

10. $2y$

11. $3x^7y^{10}$

12. $\dfrac{2y^2}{x}$

13. $\dfrac{a^6}{b^9}$

14. $5\sqrt[4]{a^3}$

15. $2x^{2/5}y^{3/5}$

16. $x^2y^4\sqrt[3]{xy^2}$

17. $2xy^2\sqrt{3x}$

18. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

19. $\{2,\ 3,\ 5\}$

20. a) Faux b) Vrai

c) Faux

21. a) : degré 2; et c) : degré 4

22. $10ab$

23. $6xh + 3h^2 - 4h$

24. $64m^3 + 144m^2n + 108mn^2 + 27n^3$

25. $(y + 4)(3y + 4)$

26. $(a + 3)(a + 2)(a - 2)$

27. $x^3(x + 1)^2(7x + 4)$

28. $\dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$

29. $\dfrac{5}{a - 2b}$

30. $\dfrac{x+2y}{x-2y}$

31. a) 0,1767

b) 1,434

c) 1,435

d) $5{,}724 \times 10^{14}$