



Université du Québec  
École  
de technologie  
supérieure

## **Maîtrise en technologie des systèmes**

---

### **Vision par ordinateur SYS-863**

Rapport du projet de session

La segmentation d'images d'illuminance comme étape  
préalable à la géonisation de pièces manufacturées.

Présenté à :

**M. Richard Lepage**

Par :

Daniel Lavigne

Rédaction: 21 juin 1999

## **Table des matières**

<b>1. INTRODUCTION .....</b>	<b>4</b>
<b>2. CONTEXTE DU PROJET DE SESSION .....</b>	<b>5</b>
<b>3. MÉTHODOLOGIE POUR LA SEGMENTATION .....</b>	<b>9</b>
<b>4. ALGORITHMES EXPÉRIMENTÉS.....</b>	<b>10</b>
4.1 SEGMENTATION AUX POINTS DE COURBURE MAXIMALE AVEC DES COURBES B-SPLINES .....	10
4.2 UTILISATION D'UN BÂTON MULTIRÉSOLUTION .....	12
4.3 ALGORITHME DE SUBDIVISION RÉCURSIVE .....	13
<b>5. RÉSULTATS OBTENUS .....</b>	<b>16</b>
5.1 RÉSULTATS AVEC LES COURBES B-SPLINES .....	16
5.2 RÉSULTATS OBTENUS AVEC LE BÂTON MULTIRÉSOLUTION .....	17
5.3 RÉSULTATS AVEC L'ALGORITHME DE SUBDIVISION RÉCURSIVE .....	19
<b>6. DISCUSSIONS .....</b>	<b>20</b>
<b>7. CONCLUSION .....</b>	<b>21</b>
<b>8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>22</b>
<b>ANNEXE A .....</b>	<b>23</b>

## **Liste des figures**

FIGURE 2.1	SCHÉMA GLOBAL DU PROJET D'INSPECTION AUTOMATISÉE.....	5
FIGURE 2.2	IMAGES D'ILLUMINANCE DES PIÈCES MANUFACTURÉES.....	6
FIGURE 2.3	IMAGE D'ILLUMINANCE ET ARÊTES DÉTECTÉES.....	7
FIGURE 2.4	IMAGES D'ARÊTES ET LEURS SUPERSEGMENTS.....	8
FIGURE 3.1	SCHÉMA BLOCS DE L'APPROCHE DESCENDANTE.....	9
FIGURE 3.2	SCHÉMA BLOCS DE L'APPROCHE ASCENDANTE.....	9
FIGURE 4.1	COURBURE D'UN SUPERSEGMENT.....	10
FIGURE 4.2	UTILISATION D'UN BÂTON MULTIRÉSOLUTION.....	12
FIGURE 4.3	SUPERSEGMENT INITIAL.....	13
FIGURE 4.4	SEGMENTS RÉSULTANTS.....	14
FIGURE 4.5	DISTANCE PERPENDICULAIRE D'UN POINT À UN SEGMENT.....	15
FIGURE 5.1	IMAGES DES ARÊTES DE LA PIÈCE #9 ET SES SUPERSEGMENTS.....	16
FIGURE 5.2	RÉSULTATS OBTENUS AVEC LA MÉTHODE DE SEGMENTATION AVEC B-SPLINES.....	17
FIGURE 5.3	RÉSULTATS OBTENUS AVEC LA MÉTHODE DU BÂTON MULTIRÉSOLUTION.....	18
FIGURE 5.4	RÉSULTATS DE LA SEGMENTATION AVEC L'ALGORITHME DE SUBDIVISION RÉCURSIVE.....	20

## 1. Introduction

Ce projet de session du cours de *Vision par Ordinateur* (SYS-863) constitue une partie des activités réalisées dans le cadre du projet d'application de la Maîtrise en technologie des systèmes. Ce projet consiste en la décomposition de pièces manufacturées en ses composantes volumétriques élémentaires, les géons, à partir d'une image d'illuminance.

L'objectif primaire du projet de session est d'implanter expérimentalement différents algorithmes de segmentation de supersegments. Ainsi, ce travail présente les algorithmes de segmentation inhérents à la détermination de points de courbure maximale à l'aide de courbes B-Splines, d'un bâton multirésolution ainsi que de l'algorithme de subdivision récursive.

Les résultats obtenus par ces algorithmes serviront par la suite à la méthodologie développée dans le cadre du projet de Maîtrise et seront ainsi utilisés pour recouvrir des informations à l'aide de regroupements d'informations structurelles.

## 2. Contexte du projet de session

Le projet de recherche consiste en l'élaboration d'un SVA pour effectuer l'inspection automatisée de pièces mécaniques. La figure 2.1 illustre le schéma global du projet de recherche.

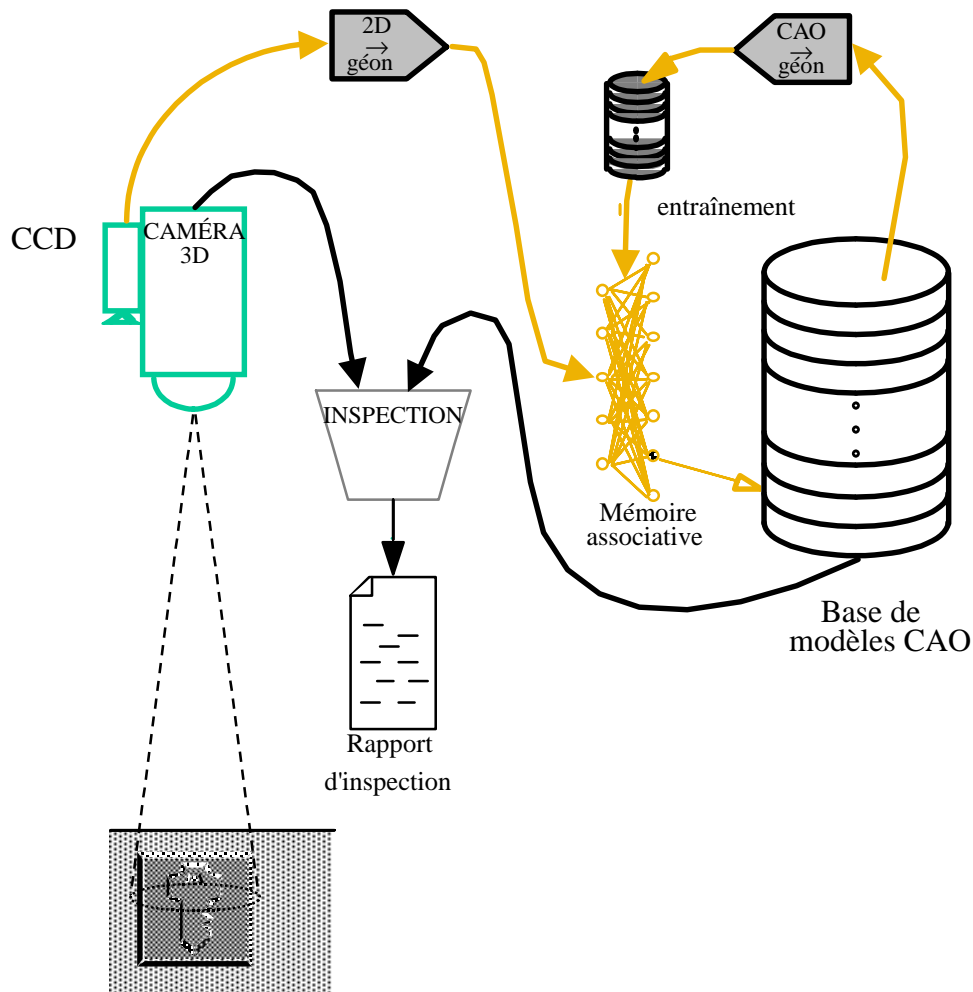


Figure 2.1 Schéma global du projet d'inspection automatisée. Le SVA est couplé à une chaîne de montage où défilent des pièces mécaniques qui viennent d'être usinées. La fonction du SVA consiste dans un premier temps en l'identification de la pièce défilant sur le convoyeur, et dans un deuxième temps en l'inspection métrologique de cette pièce.

L'identification de la pièce est effectuée par le module de conversion de l'image 2D de la pièce en ses composantes volumétriques élémentaires. Ce module est réalisé par l'ajout d'une caméra CCD au SVA pour identifier rapidement la pièce défilant sur le

convoyeur. Les travaux de recherches réalisés dans le cadre du projet d'application de la Maîtrise s'inscrivent dans l'élaboration de ce module.

La pièce ainsi identifiée est ensuite inspectée à l'aide d'une caméra laser et du module de mise en correspondance qui est constitué d'un réseau de neurones configuré selon une topologie de mémoire associative. Celui-ci est couplé à une base de données CAO comportant les descriptions du modèle de la pièce. Les données recueillies par le balayage laser sont comparées avec le modèle CAO de la pièce dans la base de données. Cette comparaison permet de caractériser la qualité de l'usinage de la pièce, celle-ci étant par la suite conservée ou rejetée.

La base de données comporte dix (10) pièces manufacturées, dont voici un échantillon des images d'illuminance pour chacune de ces pièces :



Figure 2.2 Images d'illuminance des pièces manufacturées.

Les intrants de ce projet de session sont les images des arêtes des pièces manufacturées, obtenues à l'aide d'un détecteur d'arêtes optimal. Les pixels d'arêtes détectées doivent être contigus et filiformes. La figure 2.3 illustre une image d'illuminance ainsi que les arêtes détectées.

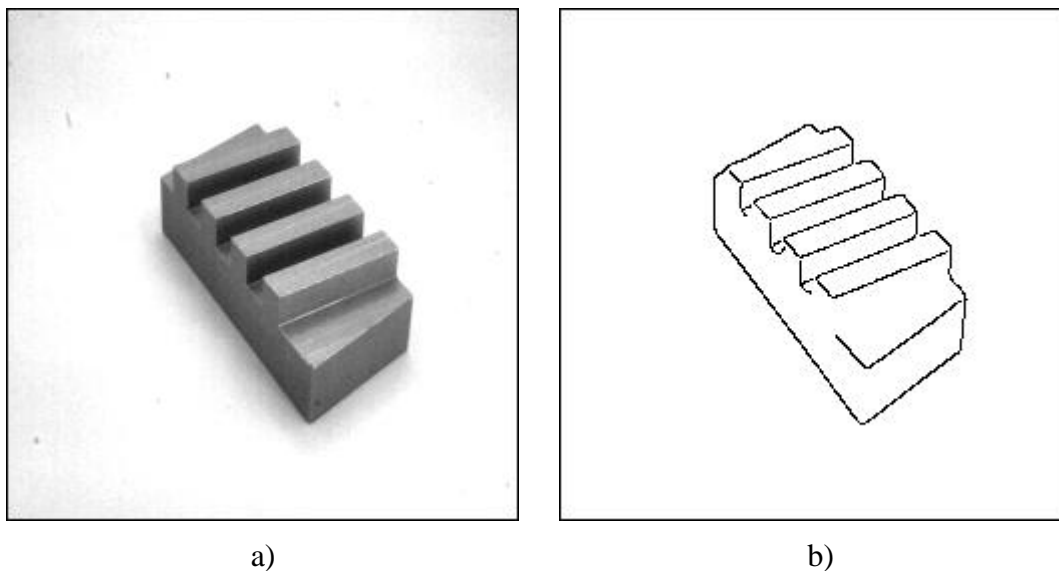


Figure 2.3 Image d'illuminance et arêtes détectées.  
Image d'illuminance (a) et les arêtes détectées avec un détecteur d'arêtes optimal (dans ce cas-ci, Canny avec  $\sigma = 2$ ).

Par la suite, l'image des arêtes est ensuite éclatée pour générer de multiples formes hétérogènes que nous appelons supersegments. La figure 2.4 suivante illustre l'image des arêtes de la pièce #9 et de la pièce #1 de la base de données ainsi que les supersegments formés.

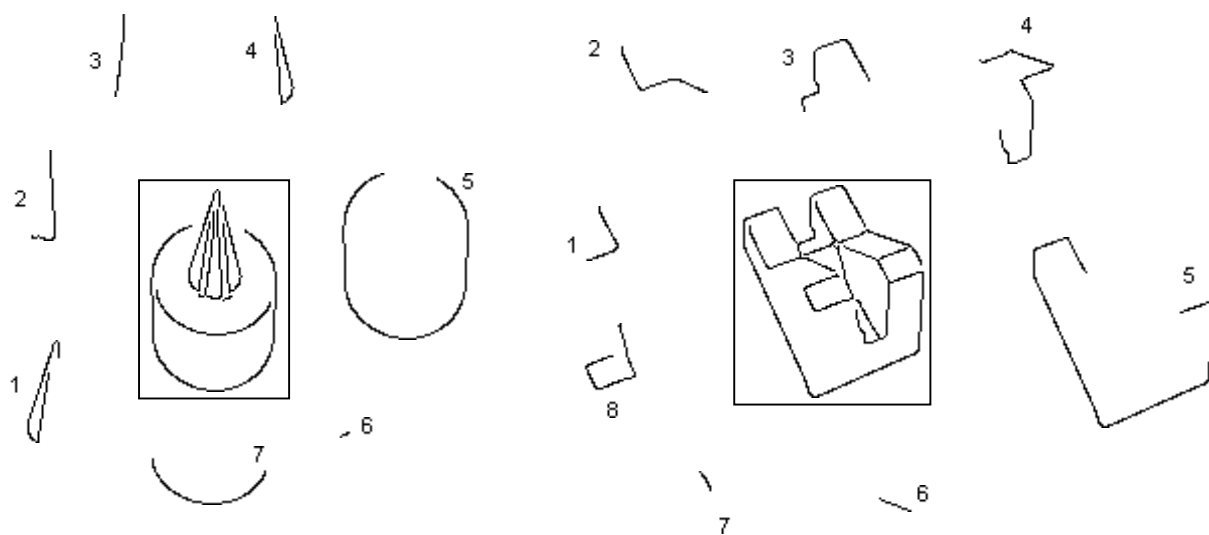


Figure 2.4 Images d'arêtes et leurs supersegments.

Le but recherché est de décomposer l'image des arêtes en un somme de segments de droite. Ainsi, nous expérimentons au cours de ce travail la segmentation des supersegments générés à l'aide de trois (3) algorithmes de segmentation utilisant : les courbes B-Splines, un bâton multirésolution et l'algorithme de subdivision récursive.



### 3. Méthodologie pour la segmentation

Dans le cadre du projet d'application de Maîtrise, nous proposons une méthode de segmentation mixte, constituée d'une approche descendante et d'une approche ascendante. Les figures 3.1 et 3.2 illustrent ces deux approches.

- Approche descendante (*top-down*)

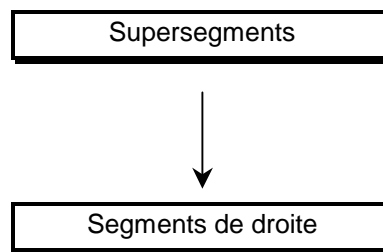


Figure 3.1 Schéma blocs de l'approche descendante.

L'approche descendante consiste à passer du niveau de représentation des supersegments en un niveau de représentation inférieur, où l'image est éclatée en une multitude de segments de droite.

- Approche ascendante (*bottom-up*)

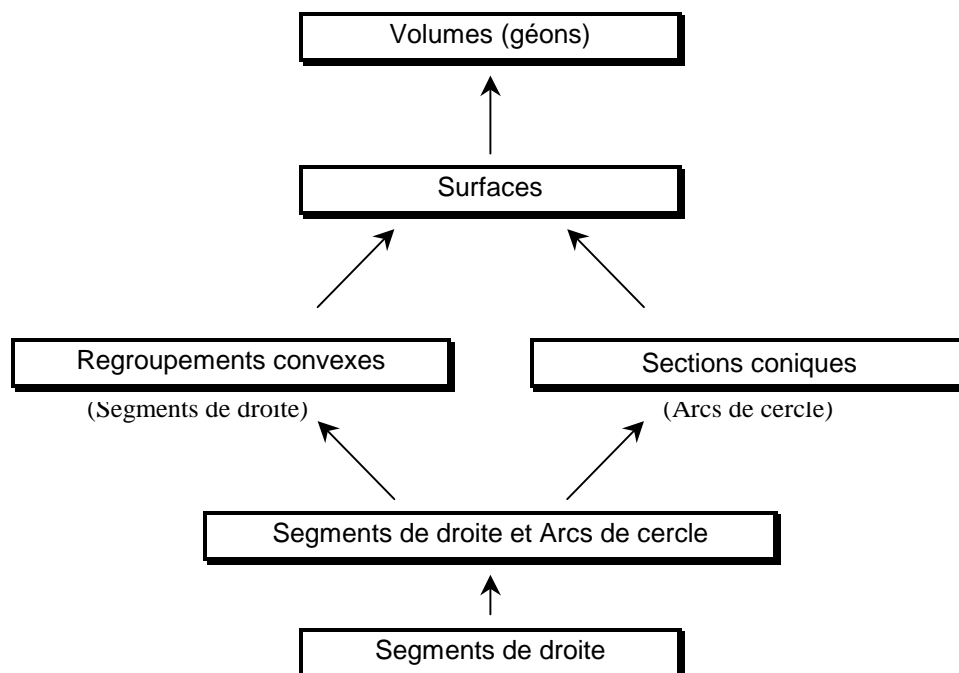


Figure 3.2 Schéma blocs de l'approche ascendante.

L'approche ascendante tente de retrouver les informations non linéaires perdues par l'approche descendante, et de caractériser l'image des arêtes en terme de deux primitives, soit des segments de droite et des arcs de cercle. Par la suite, différentes méthodes de regroupement de ces primitives seront effectuées. Les arcs de cercle seront regroupés en ellipses en utilisant le formalisme des sections coniques. Les segments de droite seront eux aussi agglomérés mais en regroupements convexes.

Dans le cadre de ce travail de session, nous nous limiterons à l'expérimentation de méthodes de segmentation pour réaliser l'approche descendante.

## 4. Algorithmes expérimentés

### 4.1 Segmentation aux points de courbure maximale avec des courbes B-Splines

Lors du procédé de segmentation, cette dernière est effectuée sur la base de certaines mesures prises sur les supersegments. En effet, il est nécessaire de définir sur quelle prémisses s'effectuera le procédé de segmentation des supersegments en segments de droite et en arcs de cercle. Une de ces mesures est d'utiliser les points de courbure maximale des supersegments.

Tel que présenté initialement par Medioni et Yasumoto (1987), le degré de courbure d'un supersegment continu peut être défini comme étant le changement du taux de la tangente le long de l'arc du supersegment.

La nature discrète des pixels du supersegment ne permet pas de mesurer localement le degré de courbure le long de celui-ci. En effet, la quantification d'un signal continu sous la forme d'une matrice bidimensionnelle discrète introduit une déformation au niveau local. La figure 4.1 suivante présente un supersegment ayant certaines courbures, selon une vue globale (a) et une partie de celui-ci vu selon une perspective locale (b). Tel qu'illustré par la figure 4.1 (b), il est difficile de détecter localement le point de courbure du supersegment. Il est donc approprié d'effectuer la détection des points de courbure au niveau global.



Figure 4.1 Courbure d'un supersegment.  
Courbure globale (a) et locale (b) d'un supersegment.

La méthode consiste en la mesure de la courbure du supersegment selon un indice  $k$ -courbure, où le degré de courbure est obtenu en utilisant  $k$  points de chaque côté d'un pixel courant du supersegment, ce qui permet d'évaluer de façon globale le degré de courbure du supersegment à ce point précis. Cette façon de faire ne permet cependant pas de localiser et de détecter efficacement la présence d'une courbure d'un supersegment, quelle qu'elle soit, tel que le peut l'être humain. Pour la détection de l'intégralité des courbures du supersegment, il est avantageux de soumettre celui-ci à un processus d'adoucissement.

L'évaluation de la courbure d'un supersegment peut sembler triviale pour l'être humain, mais celle-ci demeure un problème en vision artificielle de par la nature discrète et locale des éléments d'informations du supersegment, les pixels. Cette difficulté transcende non seulement en ce qui a trait à l'évaluation des degrés de courbure du supersegment, mais également pour la pente du supersegment en question.

On prenant  $k$  points des deux côtés du supersegment, il est possible de soumettre celui-ci à un processus d'adoucissement, et ainsi obtenir la  $k$ -pente et la  $k$ -courbure. Considérant que le degré de courbure est défini comme le taux de changement de la pente, la  $k$ -courbure peut être obtenue en prenant la différence entre les  $k$ -pentes de droite et de gauche.

Il est possible de calculer la courbure à un point  $i$  donné seulement par ses points avoisinants  $i-1$  et  $i+1$  :

$$C_v = 4 \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_{i-1})(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})}{((x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1)$$

Pour être en mesure de détecter les points de courbure, il est nécessaire d'adoucir la courbe. En utilisant des courbes B-Splines, nous pouvons calculer la courbure et le déplacement depuis une seule position de chaque point.

L'indice de courbure obtenu :

$$C_v' = 2 \frac{c_1' b_2' - c_2' b_1'}{(c_1'^2 + c_2'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2)$$

où :

$$b_1' = \frac{x_{i-2}}{12} + \frac{x_{i-1}}{6} - \frac{x_i}{2} + \frac{x_{i+1}}{6} + \frac{x_{i+2}}{12} \quad c_1' = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{3} + \frac{(x_{i+2} - x_{i-2})}{12} \quad (4.3)$$

$$b_2' = \frac{y_{i-2}}{12} + \frac{y_{i-1}}{6} - \frac{y_i}{2} + \frac{y_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+2}}{12} \quad c_2' = \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{3} + \frac{(y_{i+2} - y_{i-2})}{12}$$

Les calculs inhérents à la méthode de segmentation avec des B-splines se retrouvent à l'annexe A du présent travail.

## 4.2 Utilisation d'un bâton multirésolution

Cette méthode, adaptée des travaux de Fischler et Bolles (1986), effectue la partition d'un supersegment, basée sur la détection de discontinuités locales. Ces discontinuités se traduisent dans l'image par des points critiques, de courbure maximale. L'idée de base est de trouver les pixels d'arêtes en utilisant une procédure de bas niveau, agglomérer ces pixels en supersegments sur la base de leur proximité et leur orientation et morceler ces supersegments en de multiples segments linéaires.

L'algorithme utilisé permet de localiser ces points critiques, en utilisant un formalisme mathématique différent du concept de courbure généralement utilisé.

L'idée générale de l'algorithme est de :

1. Considérer chacun des points d'arêtes ou du supersegment selon le plus grand nombre de perspectives possibles, et retenir uniquement les points de segmentation recevant le niveau le plus élevé de multiples confirmations.
2. Détruire les précédentes sélections de points de segmentation lorsque la densité des points sélectionnés dépasse une limite prédéterminée

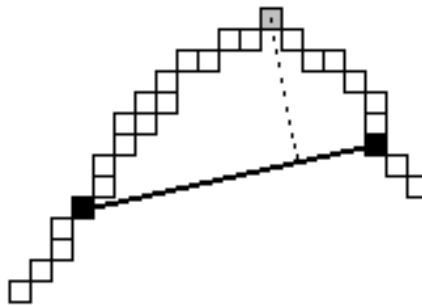


Figure 4.2 Utilisation d'un bâton multirésolution.

La méthode analyse les déviations du supersegment en utilisant un bâton qui est avancé itérativement le long du supersegment. Ce bâton possède une longueur variable, ce qui est similaire à analyser le supersegment à différentes résolutions. Suite au parcours du supersegment avec le bâton de longueur préalablement déterminée, la distance du point perpendiculaire la plus éloignée des extrémités du bâton est conservée dans un accumulateur. Le parcours de la totalité du supersegment par le bâton étant

effectué, la valeur la plus élevée parmi toutes les valeurs conservées dans l'accumulateur est retenue. A chaque résolution, donc pour une longueur de bâton fixe, l'algorithme ordonne les points critiques selon les valeurs dans l'accumulateur et sélectionne les premiers selon l'ordonnement.

Cette méthode de segmentation de supersegments est non paramétrique ; la méthode est autonome et ne nécessite aucun réglage de paramètre. Les segments résultants ne sont pas nécessairement linéaires. En effet, les primitives résultantes sont hétérogènes et très peu prévisibles.

### 4.3 Algorithme de subdivision récursive

La procédure de subdivision récursive est un algorithme de segmentation de supersegments ascendant (*bottom-up*). Elle consiste en l'ajout de sommets, aux endroits de courbure maximale sur le supersegment. La sortie de l'algorithme est composée d'un ensemble de segments de droites, composant le supersegment.

Considérons le supersegment  $S$  de la figure 4.3 suivante :

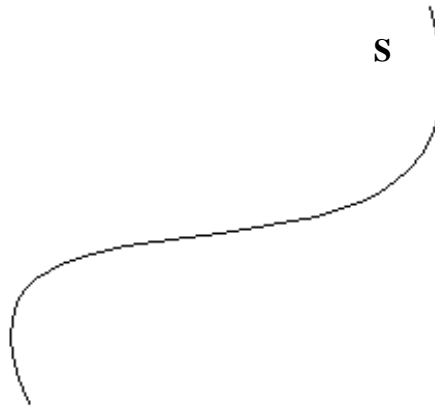


Figure 4.3 Supersegment initial.

La procédure consiste à segmenter le supersegment  $S$  de la figure 4.3 en une somme de segments de droite. Le supersegment est composé d'un ensemble de pixels  $S = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ . Pour effectuer la segmentation, cette procédure utilise une

distance de seuillage  $d^*$ . Considérez  $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \right\}$ , où  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  est le segment de droite défini par les terminaisons du supersegment  $(x_1, y_1)$  et  $(x_N, y_N)$ . Pour tous les points  $(x_n, y_n)$ ,  $d_n$  est la distance entre  $A$  et  $(x_n, y_n)$ , soit  $d_n = |\alpha x_n + \beta y_n + \gamma|$ . Considérons également  $u$  comme un point quelconque pour lequel  $d_u = \max_n d_n$ . Si

$d_u > d^*$  alors le supersegment est segmentée en deux séquences :  $S_1 = \{(x_1, y_1), \dots, (x_u, y_u)\}$  et  $S_2 = \{(x_{u+1}, y_{u+1}), \dots, (x_N, y_N)\}$ . La procédure est ensuite appliquée récursivement sur ces deux nouvelles séquences,  $S_1$  et  $S_2$ .

La figure 4.4 suivante présente la segmentation résultante du supersegment  $S$  en trois segments  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

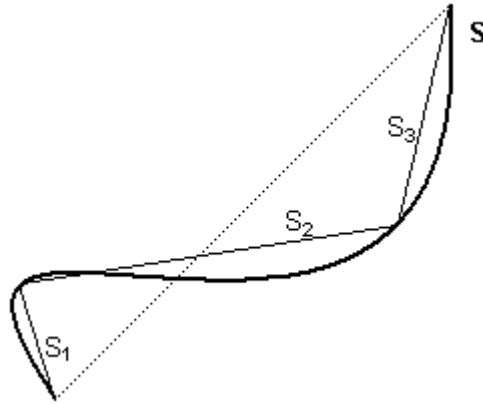


Figure 4.4 Segments résultants.

Plusieurs méthodes existent pour calculer l'erreur admise au niveau de la distance. Nous en avons utilisé deux, soit l'erreur absolue maximale  $EAM = \max_i |d_i|$  ainsi que l'erreur maximale normalisée  $\varepsilon = \frac{\max_i |d_i|}{S}$ . La première méthode mesure la déviation maximale entre deux les points et la courbe.

La deuxième méthode mesure le ratio entre l'erreur maximale absolue et la longueur totale de la courbe. Pour ces deux méthodes de mesure d'erreur,  $d_i$  est la distance entre le segment linéaire et la position du  $i^e$  point d'arête. La distance utilisée entre deux points est la distance euclidienne, soit  $d = \sqrt{(y_n - y_1)^2 + (x_n - x_1)^2}$ .  $S$  est la longueur totale de la courbe.

La figure 4.5 illustre les deux points terminaux d'un segment de droite,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , ainsi qu'un point quelconque  $(u, v)$ .

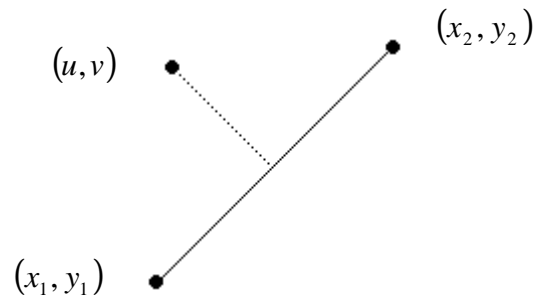


Figure 4.5 Distance perpendiculaire d'un point à un segment.

La formule mathématique du segment de droite reliant un point quelconque  $(u, v)$  à une des deux extrémités  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  peut être dérivée en calculant la pente entre ce point et celle du segment :

$$\frac{v - y_1}{u - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4.4)$$

De cette formule il est possible de soustraire la forme implicite du segment de droite, paramétrée par les coordonnées des points terminaux du segment :

$$u(y_1 - y_2) + v(x_2 - x_1) - y_1x_2 + y_2x_1 = 0 \quad (4.5)$$

La distance entre un point  $(u, v)$  et le segment de droite est  $d = l/D$ , où  $l$  est calculé en introduisant les coordonnées du point dans l'équation du segment de droite :

$$l = u(y_1 - y_2) + v(x_2 - x_1) - y_1x_2 + y_2x_1 \quad (4.6)$$

où  $D$  est la distance entre les deux points terminaux.

L'algorithme de subdivision récursive est très efficace pour la segmentation de supersegments en une somme de segments de droites. Toutefois, sa nature paramétrique nécessite la détermination d'un seuil au niveau de l'erreur absolue maximale. De plus, l'algorithme ne permet pas de préserver les non linéarités des supersegments, ce qui justifie d'utiliser par la suite l'approche ascendante. Avec cet algorithme, l'image des arêtes est constituée uniquement de primitives non linéaires, les segments de droite.

## 5. Résultats obtenus

Soit l'image des arêtes de la pièce #9 ainsi que ses supersegments :

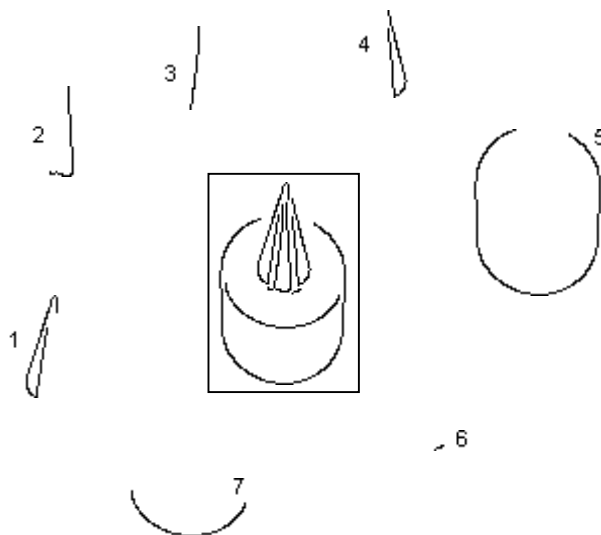


Figure 5.1 Images des arêtes de la pièce #9 et ses supersegments.

Les prochaines lignes présentent les résultats obtenus avec les trois méthodes de segmentation appliquées sur les supersegments de la pièce #9.

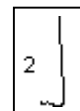
### 5.1 Résultats avec les courbes B-Splines

Supersegment #1 : 7 primitives



a)

Supersegment #2 : 3 primitives



b)

Supersegment #3 : 2 primitives



c)

Supersegment #4 : 7 primitives

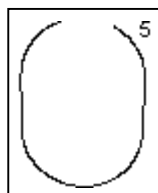


d)



Supersegment #5 : 48 primitives

Supersegment #6 : 2 primitives

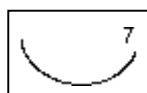


e)



f)

Supersegment #7 : 29 primitives



g)

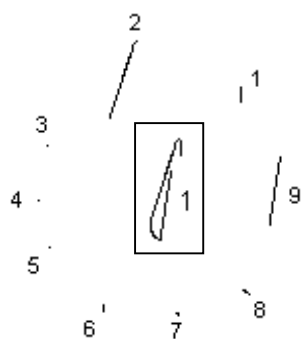
Figure 5.2 Résultats obtenus avec la méthode de segmentation avec B-Splines.

Les résultats obtenus avec la méthode utilisant les courbes B-Splines permettent de détecter judicieusement les points de courbure maximale de segments discontinus. Malheureusement, pour les segments curvilignes, la méthode détecte une surabondance de points de courbure. La figure 5.2 précédente présente le nombre de primitives détectées, soit des points ponctuels de courbure. Leur nombre élevé ne permet pas de présenter adéquatement ici leur localisation, mais notez que ces points ponctuels de courbure sont détectés sur presque la totalité des pixels présents au niveau de la courbure des segments curvilignes.

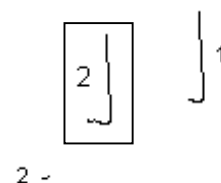
## 5.2 Résultats obtenus avec le bâton multirésolution

Supersegment #1 : 9 primitives

Supersegment #2 : 2 primitives

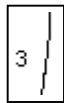


a)



b)

Supersegment #3 : 1 primitive



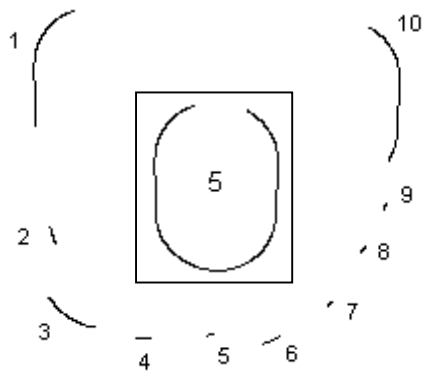
c)

Supersegment #4 : 3 primitives



d)

Supersegment #5 : 10 primitives



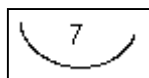
e)

Supersegment #6 : 1 primitive



f)

Supersegment #7 : 1 primitive



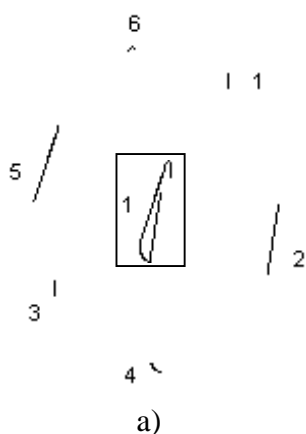
g)

Figure 5.3 Résultats obtenus avec la méthode du bâton multirésolution

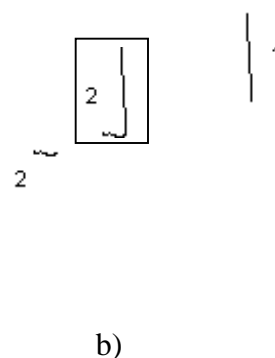
Les primitives obtenues par la méthode de segmentation avec un bâton multirésolution sont hétérogènes. La méthode génère ainsi des segments linéaires ainsi que des segments curvilignes. Par exemple, notez que le supersegment #5 est sursegmenté à sa base, comparativement au supersegment #7 qui n'est pas segmenté.

### 5.3 Résultats avec l'algorithme de subdivision récursive

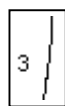
Supersegment #1 : 6 primitives



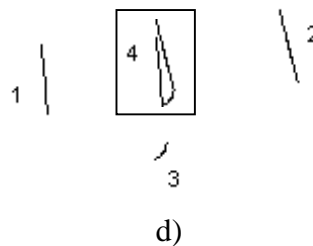
Supersegment #2 : 2 primitives



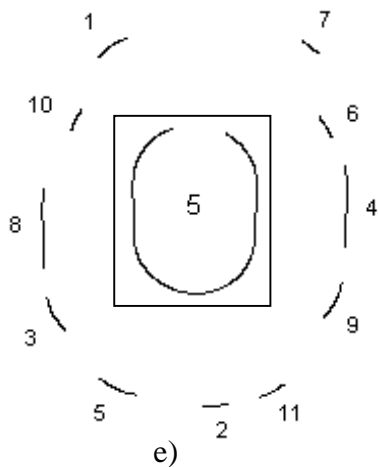
Supersegment #3 : 1 primitive



Supersegment #4 : 3 primitives



Supersegment #5 : 11 supersegments



Supersegment #6 : 1 primitive



Supersegment #7 :

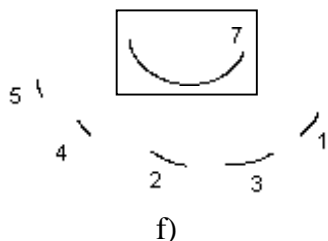


Figure 5.4 Résultats de la segmentation avec l'algorithme de subdivision récursive. La valeur d'erreur absolue maximale  $EAM = 2$ .

## 6. Discussions

Les résultats obtenus par les trois méthodes de segmentation sont différents. Ainsi, l'utilisation de courbes B-Splines permet de détecter les points de courbure maximale de segments, mais donne de pauvres résultats pour des segments curvilignes où de multiples points ponctuels de courbure sont identifiés. La méthode utilisant un bâton multirésolution, bien que non paramétrique, ne permet pas d'identifier adéquatement les points de courbure maximale présents au niveau de segments curvilignes. L'algorithme de subdivision récursive génère un seul type de primitive, le segment de droite. Malheureusement, l'image des arêtes est ainsi composée d'une somme de segments de droite, où les informations non linéaires sont perdues. L'utilisation subséquente d'une méthode d'agglomération des segments de droite en arcs de cercle, réalisée par l'approche ascendante, permettra de recouvrir les non linéarités et caractériser ainsi l'image des arêtes selon deux primitives, le segment de droite et l'arc de cercle.

## 7. Conclusion

Nous présentons dans ce travail les résultats obtenus suite à l'expérimentation de différentes méthodes de segmentation, pour identifier les points de courbure maximale présents au sein de supersegments.

Nous avons expérimenté dans un premier temps la méthode de segmentation à l'aide de courbes B-Splines. Par la suite, nous avons implanté une méthode de segmentation utilisant un bâton multirésolution. Finalement, une dernière méthode expérimentée fut l'algorithme de subdivision récursive.

Ce dernier algorithme fut sélectionné comme méthode de segmentation de supersegments à utiliser. Par contre, ce choix impose nécessairement l'utilisation d'une approche ascendante qui permettra de recouvrir les informations perdues par le phénomène de sur segmentation introduit.

## 8. Références bibliographique

Medioni G. et Yasumoto Y., « Corner Detection and Curve Representation Using Cubic B-Splines », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, **39**, pp. 267-278, 1987

Fischler, M.A. et Bolles, R.C., « Perceptual Organization and Curve Partitioning », *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **8**, 1, pp. 100-105, January 1986

## Annexe A

### Formulation mathématique de la méthode de segmentation avec B-Splines

Un *point de courbure* peut être défini comme étant un point où la courbure du supersegment passe par une discontinuité ou une valeur extrême, donc plus grand qu'un seul  $\Delta c$ . Mathématiquement, définissons  $S$  comme étant un supersegment dans la forme paramétrique :

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad (A.1)$$

où  $t$  est un paramètre.

La pente du supersegment  $S$  à un point donné  $A(t = t_1)$  est :

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{t=t_1} = \left[ \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}} \right]_{t=t_1} \qquad (A.2)$$

La longueur de l'arc du supersegment  $S$  entre le point  $A(t_1)$  et  $B(t_2)$  est :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2} dt \qquad (A.3)$$

La courbure  $C_v(t_1)$  à un point  $A(t = t_1)$  est la dérivée de la pente selon la longueur de l'arc :

$$C_v(t_1) = \frac{\frac{d^2 y}{d^2 x}}{\left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left[ \left( \frac{df}{dt} \right) \left( \frac{d^2 g}{dt^2} \right) - \left( \frac{dg}{dt} \right) \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right) \right]}{\left[ \left( \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]} \qquad (A.4)$$

Il est possible de faire traverser le supersegment  $S$ , entre les points  $A$  et  $B$ , par une courbe cubique polynomiale où le paramètre  $t$  varie entre 0 et 1 :

$$x = f(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 \qquad y = g(t) = a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 \qquad (A.5)$$

Suite aux calculs des coefficients, la courbure à un point  $A(t=0)$  est dérivée suivant :

$$C_v(0) = 2 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{(c_1^2 + c_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.6})$$

L'utilisation de B-Splines permet de calculer la courbure ainsi que la représentation de cette dernière, en utilisant plusieurs segments de courbes. Chaque segment est ainsi défini par des points de contrôle qui sont les coefficients des fonctions polynomiales de base de la B-Spline. Une courbe cubique polynomiale est la représentation d'ordre la plus basse des segments de courbes pouvant engendrer la continuité de position et de pente à un point où deux segments incurvés se rencontrent, et au même moment assure que les points terminaux des courbes traversent des points spécifiques.

La courbe B-Spline cubique paramétrique avec des points d'arrêts également espacés est définie par :

$$x(t) = TM_s G_{sx} \quad y(t) = TM_s G_{sy} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{où : } M_s = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Dans ces équations,  $T = (t^3, t^2, t, 1)$ , et  $G_{sx}$ ,  $G_{sy}$  sont les matrices géométriques déterminées par la localisation des points environnants.

Pour faire l'approximation des points de contrôle  $P_1$  jusqu'à  $P_n$  par une série de courbes B-Splines, une matrice géométrique différente entre chaque paire de points adjacents est utilisée. Assumons que le  $i^e$  point  $P_i$  a les coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

L'approximation de  $P_i$  à  $P_{i+1}$  utilise :

$$G_{sx}^i = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \end{bmatrix} \quad G_{sy}^i = \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$



Le calcul du produit  $TM_s$  :

$$TM_s = \frac{1}{6} \left[ (-t^3 + 3t^2 - 3t)(3t^3 - 6t^2 + 4), (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), t^3 \right] \quad (\text{A.10})$$

En multipliant par  $G_{sx}$  donne :

$$x(t) = TM_s G_{sx} = x_{i-1} \frac{(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)}{6} + x_i \frac{(3t^3 + 6t^2 + 4)}{6} + x_{i+1} \frac{[-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1]}{6} + x_{i+2} \frac{t^3}{6} \quad (\text{A.11})$$

ou de façon équivalente :

$$x(t) = (-x_{i-1} + 3x_i + 3x_{i+1} + x_{i+2}) \frac{t^3}{6} + (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) \frac{t^2}{2} + (-x_{i-1} + x_{i+1}) \frac{t}{2} + \frac{(x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1})}{6} \quad (\text{A.12})$$

Ce qui permet d'obtenir la valeur des quatre coefficients :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-x_{i-1} + 3x_i - 3x_{i+1} + x_{i+2})}{6} & c_1 &= \frac{(-x_{i-1} + x_{i+1})}{2} \\ b_1 &= \frac{(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})}{2} & d_1 &= \frac{(x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1})}{6} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Il est maintenant possible de calculer la courbure à un point  $i$  donné seulement par ses points avoisinants  $i-1$  et  $i+1$  :

$$C_v = 4 \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_{i-1})(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})}{\left( (x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.14})$$

Pour être en mesure de détecter les points de courbure, il est nécessaire d'adoucir la courbe. En utilisant des courbes B-Splines, nous pouvons calculer la courbure et le déplacement depuis une seule position de chaque point. Le déplacement d'un point donné  $i$  depuis une B-Spline cubique peut être exprimé par :

$$\delta_x = d_1 - x_i = \frac{x_{i-1}}{6} - \frac{x_i}{3} + \frac{x_{i+1}}{6} \quad \delta_y = d_2 - y_i = \frac{y_{i-1}}{6} - \frac{y_i}{3} + \frac{y_{i+1}}{6} \quad (\text{A.15})$$

Pour l'évaluation du degré de courbure d'un point  $i$  donné, la courbure est recalculée en utilisant une B-Spline à travers des points déplacés.  $P_i + \delta$  est utilisé au lieu de  $P_i$  pour obtenir une nouvelle B-Spline, où  $\delta = (\delta_x, \delta_y)$ .

Pour le calcul de la nouvelle courbure  $C_v'$ ,  $P_{i-1}$  est substitué par  $P_{i+1}$  :

$$P_i \rightarrow \frac{P_{i-1}}{6} + 2\frac{P_i}{3} + \frac{P_{i+1}}{6} \quad (\text{A.16})$$

$$P_i \rightarrow \frac{P_{i-1}}{6} + 2\frac{P_i}{3} + \frac{P_{i+1}}{6}$$

$$P_{i-1} \rightarrow \frac{P_{i-2}}{6} + 2\frac{P_{i-1}}{3} + \frac{P_i}{6}$$

$$P_{i+1} \rightarrow \frac{P_i}{6} + 2\frac{P_{i+1}}{3} + \frac{P_{i+2}}{6}$$

L'indice de courbure obtenu :

$$C_v' = 2 \frac{c_1' b_2' - c_2' b_1'}{(c_1'^2 + c_2'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.17})$$

où :

$$b_1' = \frac{x_{i-2}}{12} + \frac{x_{i-1}}{6} - \frac{x_i}{2} + \frac{x_{i+1}}{6} + \frac{x_{i+2}}{12} \quad c_1' = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{3} + \frac{(x_{i+2} - x_{i-2})}{12} \quad (\text{A.18})$$

$$b_2' = \frac{y_{i-2}}{12} + \frac{y_{i-1}}{6} - \frac{y_i}{2} + \frac{y_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+2}}{12} \quad c_2' = \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{3} + \frac{(y_{i+2} - y_{i-2})}{12}$$

Le deuxième déplacement est obtenu par  $\delta' = (\delta_x', \delta_y')$  :

$$\delta_x' = \frac{x_{i-2}}{36} + \frac{x_{i-1}}{18} - \frac{x_i}{6} + \frac{x_{i+1}}{18} + \frac{x_{i+2}}{36} \quad (\text{A.19})$$

$$\delta_y' = \frac{y_{i-2}}{36} + \frac{y_{i-1}}{18} - \frac{y_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{18} + \frac{y_{i+2}}{36}$$

Le déplacement total  $\delta_t = \delta + \delta'$  est :

$$\begin{aligned} \delta_{tx} &= \frac{x_{i-2}}{36} + \frac{2x_{i-1}}{9} - \frac{x_i}{2} + \frac{2x_{i+1}}{9} - \frac{x_{i+2}}{36} \\ \delta_{ty} &= \frac{y_{i-2}}{36} + \frac{2y_{i-1}}{9} - \frac{y_i}{2} + \frac{2y_{i+1}}{9} + \frac{y_{i+2}}{36} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Tous les calculs nécessaires sont obtenus en utilisant les cinq positions voisines  $P_{i-2}$  à  $P_{i+2}$ . Les conditions pour définir un point donné  $i$  comme un point de courbure significatif du supersegment sont les suivantes :

1. Le point de courbure  $C_v'$  est plus grand qu'une valeur de seuil  $c_c$ ,
2. Le point de courbure  $C_v'$  est un maximum local,
3. Le déplacement  $\delta_t$  est plus grand qu'une valeur de seuil  $d_c$ .